

氏名

学籍番号

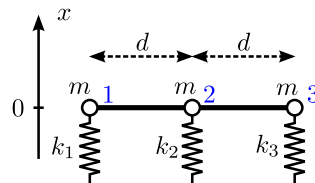
各小問の最後に書かれた括弧内の変数の 一部あるいはすべて を用いて答えよ．

極座標の運動方程式 $F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2), \quad F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$

回転座標系における運動方程式 $m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2 x', \quad m\ddot{y}' = F_{y'} - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2 y'$

Lagrange の運動方程式 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (L = K - U)$

問 1. 右図に示すように，3 つの質量 m の質点が一本の剛棒に連結された物体がある．質点はそれぞれバネと連結している．それぞれの質点の x 方向変位を x_1, x_2, x_3 とする．変位は微小で x 方向に垂直な方向の変位は考えなくてよい． $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ のとき，バネは自然長とし，重力は考えない．



1. $k_1 = k_2 = k_3 = k$ とする．以下の問に答えよ．
 - a. この物体の質量中心における運動方程式を書け．(x_1, x_3, k, m) **7 点**
 - b. 質量中心を中心とする回転の運動方程式を書け．(x_1, x_3, k, m, d) **7 点**
2. 質点 1 についているバネを，バネの自然長と同じ長さの剛な棒に取り替えた ($k_1 = \infty, k_2 = k_3 = k$)．物体は質点 1 を中心になめらかに運動する．
 - c. 質点 1 を中心とする回転の運動方程式を書け．(x_3, k, m, d) **6 点**

1.
 - a. 質量中心の位置 x_2 である．また，この物体の質量は $3m$ である．よって，運動方程式は

$$3m\ddot{x}_2 = -k(x_1 + x_2 + x_3) \quad (1)$$

となる． x_2 は

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} \quad (2)$$

と表されるので，

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_3) = -k(x_1 + x_3) \quad (3)$$

を得る．

- b. 質量中心 (質点 2) を中心とする角運動量は

$$L = -m d \dot{x}_1 + m d \dot{x}_3 \quad (4)$$

である．モーメントは，

$$N = k d x_1 - k d x_3 \quad (5)$$

となる．回転の運動方程式 $\dot{L}_c = N_c$ より，

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3) = -k(x_1 - x_3) \quad (6)$$

- 2.

- c. 質点 1 を中心とする角運動量は

$$L = m d \dot{x}_2 + 2m d \dot{x}_3 \quad (7)$$

である．モーメントは，

$$N = -k d x_2 - 2k d x_3 \quad (8)$$

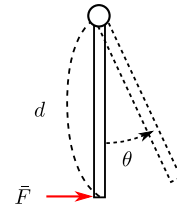
となる．回転の運動方程式 $\dot{L} = N$ より，

$$m(\ddot{x}_2 + 2\ddot{x}_3) = -k(x_2 + 2x_3) \quad (9)$$

$2x_2 = x_3$ より

$$m\ddot{x}_3 = -k x_3 \quad (10)$$

問 2. 右図に示すように、太さ一定で均質な質量 m 、長さ d の剛な棒がヒンジで固定されている。この棒はヒンジを中心になめらかに運動する。静止した状態の棒の端点（ヒンジとは逆側）に撃力 $\bar{F}$ を与えた。棒と鉛直方向のなす角を θ とする。重力は鉛直下向きに作用するものとし、重力加速度は g である。以下の問に答えよ。



1. 撃力を与えた直後の角速度 ω_0 はいくらか。ヒンジを中心とする棒の慣性モーメントを I として答えよ。($I, \bar{F}, d$) 7 点
2. 撃力を与えた直後の運動エネルギー K はいくらか。($I, \bar{F}, d$) 7 点
3. 撃力 $\bar{F}$ を与えた後、棒は単振動した ($\theta \ll 1$)。角度 θ の最大値を求めよ。(注意：慣性モーメントは I は用いて答えないこと。)($m, \bar{F}, d, g$) 4 点
4. 棒の端点（ヒンジとは逆側）に質量 m のおもりを付けて、同様に撃力を与えたところ、棒は単振動した。おもりの体積は微小であり、質点とみなせる。このときの角振動数を答えよ。(d, g) 4 点

1.

$$I\omega_0 = \bar{F}d \quad (11)$$

より

$$\omega_0 = \frac{\bar{F}d}{I} \quad (12)$$

2.

$$K = \frac{I}{2}\omega_0^2 = \frac{\bar{F}^2 d^2}{2I} \quad (13)$$

3. $\theta = 0$ のときに $U = 0$ となるように位置エネルギーを定義する。

$$U = \frac{mgd(1 - \cos \theta)}{2} \sim \frac{mgd\theta^2}{4} \quad (14)$$

撃力を与えられた直後の運動エネルギーと θ が最大値を取り棒が静止するときの位置エネルギーは等しくなるので、

$$\frac{mgd\theta_{\max}^2}{4} = \frac{\bar{F}^2 d^2}{2I} \quad (15)$$

が整理する。よって、

$$\theta_{\max} = \sqrt{\frac{2\bar{F}^2 d^2}{mgdI}} \quad (16)$$

となる。 $I = \frac{md^2}{3}$ より、

$$\theta_{\max} = \frac{\bar{F}}{m} \sqrt{\frac{6}{gd}} \quad (17)$$

を得る。

3. の別解

$\dot{L} = N$ より、

$$I\ddot{\theta} = -\frac{mgd}{2} \sin \theta \quad (18)$$

となる。 $\sin \theta \sim \theta$ より、

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgd}{2I} \theta \quad (19)$$

となるので、角度 θ は

$$\theta = A \sin \sqrt{\frac{mgd}{2I}} t \quad (20)$$

で与えられる。角速度は

$$\dot{\theta} = A \sqrt{\frac{mgd}{2I}} \cos \sqrt{\frac{mgd}{2I}} t \quad (21)$$

となる。撃力を与えられた直後の角速度が ω_0 であるので、

$$A \sqrt{\frac{mgd}{2I}} = \omega_0 \quad (22)$$

となる。よって、 $I = \frac{md^2}{3}$ を代入することで次の値を得る。

$$A = \omega_0 \sqrt{\frac{2I}{mgd}} = \frac{\bar{F}}{m} \sqrt{\frac{6}{gd}} \quad (23)$$

4. 棒の端点におもりが付けると慣性モーメントは

$$I = \frac{md^2}{3} + md^2 = \frac{4md^2}{3} \quad (24)$$

となる。 $\dot{L} = N$ より、

$$\frac{4md^2}{3} \ddot{\theta} = -\frac{1}{2} mgd \theta - mgd \theta \quad (25)$$

となる。まとめると

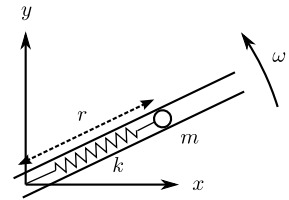
$$\ddot{\theta} = -\frac{9}{8} \frac{g}{d} \theta \quad (26)$$

となる。よって、以下の角振動数を得る。

$$\sqrt{\frac{9g}{8d}} \quad (27)$$

となる。

問 3. 右図のように、角速度 ω で水平面内で筒が回転している．その中に質量 m の質点がなめらかに移動する．質点には自然長 r_0 、バネ定数 k のバネがついている．中心から質点までの距離を r とする．質点は筒の中をなめらかに運動するものとし、以下の問に答えよ．



1. 質点の運動エネルギー K を求めよ． $(m, \dot{r}, r, \omega)$ 7 点
2. 半径方向の運動方程式を求めよ． $(m, \ddot{r}, \dot{r}, r, r_0, \omega, k)$ 9 点
3. 中心から質点までの距離を一定のまま運動させたい ($r = \text{一定}$)．このとき、筒の角速度 ω が満たすべき条件を書け． (k, m) 3 点
4. 3. で求めた条件のもとで、中心から質点までの距離が一定のまま運動するとき、その距離 r を求めよ． (k, m, ω, r_0) 3 点
5. 3. で求めた条件のもとで、質点が半径方向に単振動するとき、角振動数を求めよ． (k, m, ω) 3 点

1. 半径方向の速度 $\dot{r}$ 、周方向の速度 $r\omega$ より、

$$K = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2) \quad (28)$$

2. ポテンシャルエネルギーは

$$U = \frac{k}{2} (r - r_0)^2 \quad (29)$$

と書ける．ラグランジュの運動方程式より、

$$m\ddot{r} = mr\omega^2 - k(r - r_0) \quad (30)$$

を得る．

3. 2. で求めた運動方程式より、

$$m\ddot{r} = (m\omega^2 - k)r + kr_0 \quad (31)$$

となる． $\ddot{r} = 0$ となるためには、 $m\omega^2 - k < 0$ が必要である．
よって、 ω が満たすべき関係は以下の通り．

$$\omega < \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (32)$$

- 4.

$$0 = (m\omega^2 - k)r + kr_0 \quad (33)$$

より、

$$r = \frac{kr_0}{k - m\omega^2} \quad (34)$$

- 5.

$$\ddot{r} = -\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)r + \frac{k}{m}r_0 \quad (35)$$

$$= -\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\left(r + \frac{k/m}{k/m - \omega^2}r_0\right) \quad (36)$$

ここで、

$$x = r + \frac{k/m}{k/m - \omega^2}r_0 \quad (37)$$

とおくと、

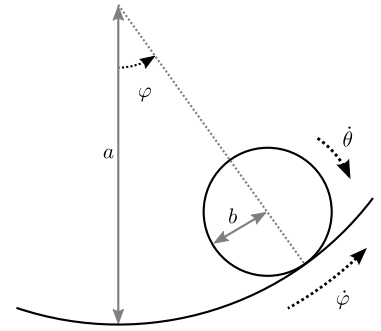
$$\ddot{x} = -\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)x \quad (38)$$

を得る．よって、以下の角振動数を得る．

$$\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} \quad (39)$$

問 4. 質量 m , 半径 b の円盤が半径 a の大きな円管の中ですから転がりながら運動をする．円盤は厚さ一定で均質とする．円管の中心と円盤の中心を結ぶ直線と鉛直方向とのなす角を φ , 円盤の角速度を $\dot{\theta}$ とする．重力は鉛直下向きに作用し , 重力加速度は g とする．以下の問に答えよ．

1. $\dot{\theta}$ と $\dot{\varphi}$ の関係を書け． ($\dot{\theta}, \dot{\varphi}, a, b$) 3 点
2. 円盤の運動エネルギー K を書け． ($m, \dot{\varphi}, a, b$) 7 点
3. 円盤の位置エネルギー U を書け．ただし , $\varphi = 0$ で $U = 0$ とする． (m, φ, a, b, g) 3 点
4. 円管が円盤に対して与える束縛力を N とする．円盤の質量中心における半径方向の運動方程式を書け． ($m, N, \dot{\varphi}, \varphi, a, b, g$) 7 点
5. 円環が円盤に対して与える摩擦力を F とする．円盤の質量中心における周方向の運動方程式を書け． ($m, F, \ddot{\varphi}, \dot{\varphi}, \varphi, a, b, g$) 7 点
6. 円盤の質量中心を中心とする回転の運動方程式を書け． ($m, F, N, \ddot{\theta}, a, b, g$) 7 点
7. $\varphi \ll 1$ の範囲で運動するとき , この円盤は単振動となる．角振動数を求めよ． (a, b, g) 3 点



1.

$$(a - b)\dot{\varphi} = b\dot{\theta} \quad (40)$$

2.

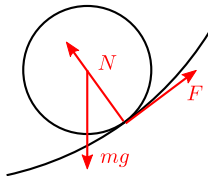
$$K = \frac{m}{2}(a - b)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 \quad (41)$$

$$= \frac{3}{4}m(a - b)^2\dot{\varphi}^2 \quad (42)$$

3.

$$U = mg(a - b)(1 - \cos \varphi) \quad (43)$$

4. 円盤に働く力は下図の通り



極座標における運動方程式 (半径方向)

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (44)$$

を用いる．

$$m(a - b)\dot{\varphi}^2 = -N + mg \cos \theta \quad (45)$$

5. 極座標における運動方程式 (周方向)

$$F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \quad (46)$$

を用いる．

$$m(a - b)\ddot{\varphi} = -F - mg \sin \theta \quad (47)$$

6.

$$\frac{mb^2}{2}\ddot{\theta} = -bF \quad (48)$$

7.

2., 3. の結果を用いて , Lagrange の運動方程式より次式を得る．

$$\frac{3}{2}m(a - b)^2\ddot{\varphi} = -mg(a - b) \sin \varphi \quad (49)$$

$\sin \varphi \sim \varphi$ より ,

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2}{3} \frac{g}{(a - b)} \varphi \quad (50)$$

を得る．よって , 以下の角振動数を得る．

$$\sqrt{\frac{2}{3} \frac{g}{(a - b)}} \quad (51)$$

7. の別解

3., 4., 5. から求めることもできる．