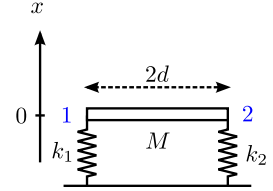


氏名

学籍番号

右図のように、水平面内を動く長さ $2d$ 、質量 M の均質な剛棒がある。剛棒の両端には、それぞれバネ定数 k_1 と k_2 のバネがついている。剛棒の両端の x 座標はそれぞれ x_1, x_2 であり、ともに $x_1 = x_2 = 0$ で自然長となる。 x_1, x_2 は非常に小さい値をとるものとする。以下の問に答えよ。ただし、解答は括弧の中の変数をすべてあるいは一部を用いよ。



1. $k_1 = k_2 = k$ とする。運動方程式と回転の運動方程式より、加速度 $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2$ をそれぞれ求めよ。 (x_1, x_2, M, k, d)
2. $t = 0$ において $x_1 = 0, x_2 = a, \dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$ とする。時刻 t における x_1, x_2 を求めよ。
 (t, a, M, k, d)

1.

とおくと固有値問題に帰着する。式 (5) の係数行列の固有値は、

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{2k}{M}(x_1 + x_2) \quad (1) \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{M}} \quad (7)$$

となる。また、それぞれの固有値に対応する固有ベクトルは

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\frac{6k}{M}(x_2 - x_1) \quad (2) \quad \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

式 (1), (2) より、

$$\ddot{x}_1 = -\frac{2k}{M}(2x_1 - x_2) \quad (3)$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{2k}{M}(-x_1 + 2x_2) \quad (4)$$

となる。よって、線型結合により次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} - \frac{k}{M} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{M}} t + \delta_1 \right) + B \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \cos \left(\sqrt{\frac{6k}{M}} t + \delta_2 \right) \quad (9)$$

これに初期条件を代入すると次式を得る。

ここで、

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \cos(\omega t + \delta) \quad (6) \quad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{a}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{M}} t \right) + \frac{a}{2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos \left(\sqrt{\frac{6k}{M}} t \right) \quad (10)$$