

氏名

学籍番号

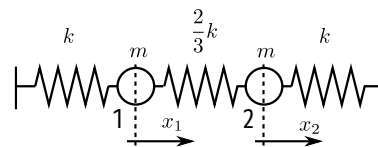
各小問の最後に書かれた括弧内の変数の 一部あるいはすべて を用いて答えよ。括弧内に時間 t が入っている場合は時間微分を用いても良い。回転は反時計まわりを正とする。

極座標の運動方程式 $F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2), \quad F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$

回転座標系における運動方程式 $m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2x', \quad m\ddot{y}' = F_{y'} - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2y'$

Lagrange の運動方程式 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (L = K - U)$

問 1. 左図のように、質量 m の 2 つの質点が 3 つのバネで連結されている。左右のバネのバネ定数は k 、真ん中のバネは $\frac{3}{2}k$ である。 $x_1 = x_2 = 0$ のときバネは自然長である。以下の問いに答えよ。



1. 質点 1 および質点 2 の運動方程式を書け。 (x_1, x_2, k, m, t)
2. 固有振動数をすべて求めよ。 (k, m)
3. 固有振動数に対応するモードをすべて求めよ。
4. $t = 0$ において、 $x_1 = x_0, x_2 = 0, \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ とする。 x_1 および x_2 を時刻 t を用いて表わせ。 (k, m, t, x_0)

コメントと解答

1.

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + \frac{3}{2}k(x_2 - x_1) \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -\frac{3}{2}k(x_2 - x_1) - kx_2 \quad (2)$$

より、

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = -\frac{k}{m} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

2. 特性方程式を解く。

$$\left(\frac{5}{2}\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \quad (4)$$

$\omega^2 = \frac{k}{m}, 4\frac{k}{m}$ よって、固有振動数は以下の通り。

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad 2\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5)$$

3. $\omega^2 = \frac{k}{m}$ のとき、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$\omega^2 = 4\frac{k}{m}$ のとき、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

4.

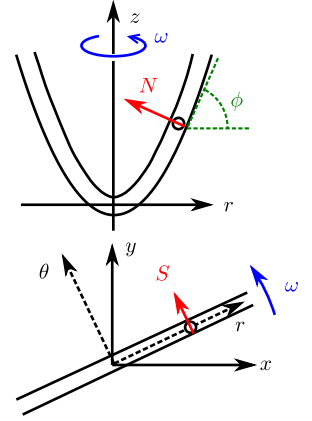
一般解は、固有振動数で振動する $\sin, \cos$ を用いて以下のように表される。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (A \cos \omega_1 t + B \sin \omega_1 t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (C \cos \omega_2 t + D \sin \omega_2 t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

初期条件より、 $A = C = \frac{x_0}{2}, B = D = 0$ である。 よって、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_0}{2} \left(\cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos 2\sqrt{\frac{k}{m}} t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad (9)$$

問 2. 右上の図に示すように、放物線 ($z = cr^2$, c は定数) の形状をした管が一定の角速度 ω で回転しており、この管の中を質量 m の質点が移動する。右下の図は、これを真上から見たときの様子を表している。重力加速度を g 、放物線を含む面内における拘束力を N 、放物線を含む面に直交する拘束力を S とおく。管と質点の間には摩擦は生じないものとする。以下の問いに答えよ。なお、設問 1., 3. においては簡単のため、放物線の傾きを ϕ として答えよ。



コメントと解答

1. 極座標の運動方程式

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (10)$$

より,

$$-N \sin \phi = m(\ddot{r} - r\omega^2) \quad (11)$$

2.

$$F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \quad (12)$$

より,

$$S = 2m\dot{r}\omega \quad (13)$$

より,

3.

$$m\ddot{z} = -mg + N \cos \phi \quad (14)$$

4. 半径方向の速度は $\dot{r}$ 、周方向の速度は ωr である。鉛直方向の速度は

$$\frac{dz}{dt} = 2cr\dot{r} \quad (15)$$

よって、運動エネルギー K は、

$$K = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 + 4c^2 r^2 \dot{r}^2) \quad (16)$$

z 方向の速度を忘れていた解答が多かった。

5. 位置エネルギー U は、

$$U = mgz = mgcr^2 \quad (17)$$

6.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (18)$$

を用いる。より,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{r} + 4mc^2 r^2 \dot{r}) \quad (19)$$

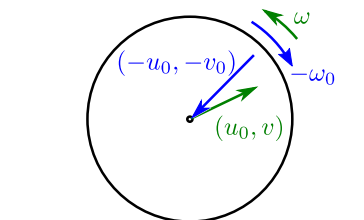
$$= m\ddot{r} + 8mc^2 r\dot{r}^2 + 4mc^2 r^2 \ddot{r} \quad (20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\omega^2 r + 4mc^2 r\dot{r}^2 - 2mgcr \quad (21)$$

よって

$$m\ddot{r} + 4mc^2 r\dot{r}^2 + 4mc^2 r^2 \ddot{r} - m\omega^2 r + 2mgcr = 0 \quad (22)$$

問 3. 質量 m , 半径 a のスーパーボール（ゴムでできた球）が床に衝突した。衝突前の重心の速度は $(-u_0, -v_0)$, 角速度は $-\omega_0$ であり, 衝突後の重心の速度は (u_0, v) , 角速度は ω となった。ただし, $u_0 > 0, v_0 > 0, \omega_0 > 0$ である。衝突時にスーパーボールは水平方向に $\bar{F}$, 鉛直方向に $\bar{N}$ の撃力を受けた。スーパーボールの変形は十分小さく, 剛体とみなせるとする。このとき, 以下の問に答えよ。



1. 床に衝突した直後のスーパーボールの速さ v は, 衝突直前の速さの半分となった。スーパーボールに作用した鉛直方向の撃力 $\bar{N}$ を求めよ。 (m, v_0)
2. スーパーボールに作用した水平方向の撃力 $\bar{F}$ を求めよ。 (m, u_0)
3. スーパーボールと床の間には摩擦が作用し滑らないものとする。水平方向速度 u_0 と角速度 ω の関係を書け。 (a, u_0, ω)
4. 衝突後のスーパーボールの角速度 ω を求めよ。 (m, a, u_0, ω_0)
5. 衝突後のスーパーボールの角速度が $\omega = 0$ となった。衝突により失われた力学的エネルギー ΔK を求めよ。 (m, a, u_0, v_0)

コメントと解答

追記：出題ミスです。条件が過多になっています。3.3 は不要でした。

鉛直方向の式

$$mv - m(-v_0) = \bar{N} \quad (23)$$

水平方向の式

$$mu_0 - m(-u_0) = \bar{F} \quad (24)$$

回転に関する式

$$I\omega - I(-\omega_0) = a\bar{F} \quad (25)$$

1. 式 (23) と $v = \frac{1}{2}v_0$ より,

$$\bar{N} = \frac{3}{2}mv_0 \quad (26)$$

- 2.

式 (24) より

$$\bar{F} = 2mu_0 \quad (27)$$

- 3.

$$u_0 = a\omega \quad (28)$$

- 4.

式 (25) より,

$$\omega = -\omega_0 + \frac{a\bar{F}}{I} \quad (29)$$

$$= -\omega_0 + \frac{2mau_0}{\frac{2}{5}ma^2} \quad (30)$$

$$= -\omega_0 + \frac{5u_0}{a} \quad (31)$$

追記：前問 3 より

$$\omega = \frac{u_0}{a} \quad (32)$$

でも正解とする。

- 5.

運動エネルギーが $\frac{m}{2}v^2$ と $\frac{1}{2}\frac{ma^2}{5}\omega^2$ の和で表されていれば, 正解とする。

衝突前の運動エネルギー

$$K_0 = \frac{m}{2}(u_0^2 + v_0^2) + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{2}\omega_0^2 \quad (33)$$

衝突後の運動エネルギー

$$K = \frac{m}{2}\left(u_0^2 + \frac{1}{4}v_0^2\right) \quad (34)$$

$w = 0$ より,

$$\omega_0 = \frac{5u_0}{a} \quad (35)$$

となるので,

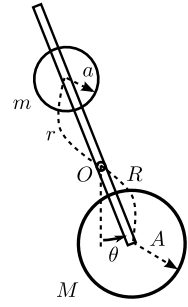
$$\Delta K = K_0 - K = \frac{3}{8}mv_0^2 + \frac{25}{4}mu_0^2 \quad (36)$$

追記：問 3. があるので, ω は式 (32) の通り, 一意に決まるのでおかしい問題となっている。式 (32) より, $w_0 = u_0 = 0$ なる条件が得られる。これを考慮すると,

$$\Delta K = K_0 - K = \frac{3}{8}mv_0^2 \quad (37)$$

でも正解となる。ここでは, $\frac{3}{8}mv_0^2$ が書けていれば, mu_0^2 の係数にかかわらず正解とする。

問 4. 左図に示すように質量のない剛棒が原点 O を中心に回転できる装置に、質量 m 、半径 a の円盤 1 と質量 M 、半径 A の円盤 2 をつけた。原点から円盤 1 および円盤 2 までの距離はそれぞれ r, R である。剛棒と鉛直方向のなす角度を θ 、重力加速度を g とする。また、剛棒、円盤 1、円盤 2 が一体となった構造をここでは単に「振り子」と呼ぶこととする。以下の問に答えよ。



1. 原点 O まわりの振り子の慣性モーメント I を求めよ。(m, a, r, M, A, R)
2. 振り子に作用する原点まわりのモーメントを求めよ。(θ, m, r, M, R, g)
3. この振り子は図に示すように円盤 2 が下側にある状態で単振動した。この単振り子の角振動数 ω を求めよ。ただし、 $\theta \ll 1$ とする。(m, r, M, R, I, g)
4. 円盤 1 の位置を原点より少し離れた (r を $r + \Delta r$ とした。 $\Delta r > 0$)。角振動数は増えるか減るか論ぜよ。

コメントと解答

よって、

メトロノームを参考にした問題である。

1. 2つの慣性モーメントは単純に和で表される。平行軸の定理より、

$$I = \frac{1}{2}ma^2 + mr^2 + \frac{1}{2}MA^2 + MR^2 \quad (38)$$

2.

$$N = (-MR + mr)g \sin \theta \quad (39)$$

3.

$$N \sim -(MR - mr)g\theta \quad (40)$$

$$I\ddot{\theta} = -(MR - mr)g\theta \quad (41)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{(MR - mr)g}{I}} \quad (42)$$

4.

$$\omega = \sqrt{\frac{\left(MR - mr \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)\right)g}{\frac{1}{2}ma^2 + mr^2 \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}MA^2 + MR^2}} \quad (43)$$

となり、分母が増え、分子が減っているため角振動数は減少する。追記：慣性モーメントが増加することについても言及すること