

氏名

学籍番号

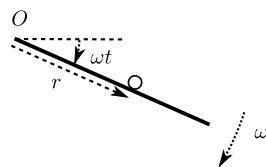
各小問の最後に書かれた括弧内の変数の 一部あるいはすべて を用いて答えよ．括弧内に時間 t が入っている場合は時間微分を用いても良い．

極座標の運動方程式 $F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2), \quad F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$

回転座標系における運動方程式 $m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2 x', \quad m\ddot{y}' = F_{y'} - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2 y'$

Lagrange の運動方程式 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (L = K - U)$

問 1. (無限に大きな) 平板が時計まわりに一定の角速度 $\omega (> 0)$ で回転しており，その上で質量 m の質点が運動している．原点から質点までの距離を r とし，重力加速度を g とする．平板と質点の間には摩擦は作用しないものと仮定する．時刻 $t = 0$ において，平板は水平，質点の位置，速度はそれぞれ $r = 0, \dot{r} = 0$ である．以下の問いに答えよ．なお，上記の「回転座標系における運動方程式」は，反時計回りのとき $\omega > 0$ であることに注意せよ．



- 半径方向の運動方程式を求めよ．(r, t, ω, g)
- 平板が質点に与える拘束力を R とする．周方向の運動方程式を求めよ．(r, m, t, R, ω, g)
- 半径方向の運動方程式を解き， r を表せ．(t, ω, g)
- 質点が平板から離れるときの時刻を $t = t_1$ とすると， $2 \cos \omega t_1 = \cosh \omega t_1$ が成立することを示せ．

コメントと解答

1. 回転座標系における運動方程式を用いる．

$$m\ddot{r} = mg \sin \omega t + mr\omega^2 \quad (1)$$

m を消去して，以下を得る．

$$\ddot{r} = g \sin \omega t + r\omega^2 \quad (2)$$

2. 時計回りに回転しているので，コリオリ力は進行方向（速度の向き）に対して左向き．

$$0 = R - mg \cos \omega t + 2m\omega\dot{r} \quad (3)$$

極座標の運動方程式を用いても良い． $\theta = -\omega t$ とすれば良い．次の 2 式はそれぞれ式 (1), (3) に対応する．

$$mg \sin \omega t = m(\ddot{r} - r\omega^2) \quad (4)$$

$$-mg \sin \omega t + R = -2m\omega\dot{r} \quad (5)$$

3.

式 (2) の特殊解を $r = a \sin \omega t$ と仮定すると，式 (2) に代入することで，係数 a を以下のようにすれば特殊解が得られることが分かる．

$$a = -\frac{g}{2\omega^2} \quad (6)$$

ついで，以下の斉次方程式の一般解を計算する．

$$\ddot{r} - r\omega^2 = 0 \quad (7)$$

$r = e^{\lambda t}$ において計算すると， $\lambda = \pm \omega$ となる．これより，

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \quad (8)$$

を得る．式 (2) の一般解は，式 (7) の一般解と式 (2) の特殊解の和で与えられる．

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} - \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t \quad (9)$$

この式を時間微分すると，

$$\dot{r} = \omega Ae^{\omega t} - \omega Be^{-\omega t} - \frac{g}{2\omega} \cos \omega t \quad (10)$$

を得る． $t = 0$ において $r = 0, \dot{r} = 0$ より，

$$0 = A + B \quad (11)$$

$$0 = \omega A - \omega B - \frac{g}{2\omega} \quad (12)$$

となる．これより， $A = -B = \frac{g}{4\omega^2}$ を得る．よって，

$$r = \frac{g}{2\omega^2} (\sinh \omega t - \sin \omega t) \quad (13)$$

4. $R = 0$ のとき，質点は床から離れる．

$$R = 0 = -mg \cos \omega t_1 + 2m\omega \dot{r}|_{t=t_1} \quad (14)$$

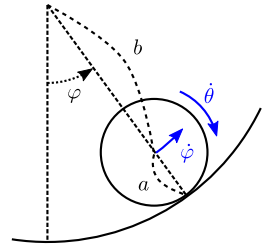
式 (13) を代入すると，

$$-mg \cos \omega t_1 + mg (\cosh \omega t_1 - \cos \omega t_1) = 0 \quad (15)$$

を得る．これより，以下の関係式を得る．

$$2 \cos \omega t_1 = \cosh \omega t_1 \quad (16)$$

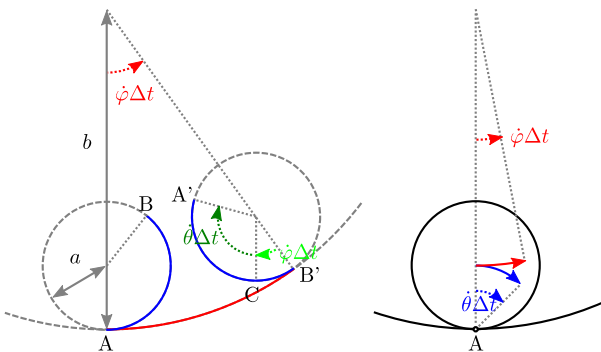
問 2. 右図に示すように半径 a , 質量 M の丸いものが半径 $a + b$ の固定された円筒の内部の曲面上で運動している . この丸いものの質量中心はちょうど円の中央にあり , 慣性モーメントは $I = \beta Ma^2$ である . この丸いものは曲面上を滑らず転がるものとする . 重力加速度を g とする . 以下の問いに答えよ .



1. 「円筒の中心と丸いものの質量中心を結ぶ直線」と「鉛直方向」のなす角を φ とする . 丸いものの回転速度 $\dot{\theta}$ と $\dot{\varphi}$ の間で $a\dot{\theta} = b\dot{\varphi}$ の関係式が成り立つことを図を用いて簡単に示せ .
2. 丸いものの運動エネルギー K を ($\dot{\theta}$ を用いず) 表せ . ($a, b, M, t, \varphi, \beta$)
3. 丸いものの位置エネルギー U を求めよ . ただし , $\varphi = 0$ のとき $U = 0$ とする . ($a, b, M, g, \varphi, \beta$)
4. 小問 2. 3. より , $\varphi \ll 1$ のとき , φ に関する単振動の式を得る . このとき , 角振動数 ω を求めよ . (a, b, g, β)
5. 丸いものとして次にあげる 4 つの物体を用いる . 「1. 円盤 (マンホールのようなもの) , 「2. 円輪 (フラフープのようなもの) , 「3. 球」 , 「4. 内部に半径 $\frac{a}{2}$ の円孔がある円盤 (ワッシャーのようなもの) 」いずれも質量は M , 半径は a で , 密度は一樣とする . これらの物体を用いたときの (φ に関する単振動) の角振動数をそれぞれ , $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ とおく . この角振動数 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ を大きい順に並べよ .

コメントと解答

1. 下記のいずれかのような絵が描いてあり , 若干の説明があれば OK .



2.

$$K = \frac{M}{2} (b\dot{\varphi})^2 + \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 \quad (17)$$

$$= \frac{M}{2} (b\dot{\varphi})^2 + \frac{\beta Ma^2}{2} \left(\frac{b\dot{\varphi}}{a} \right)^2 \quad (18)$$

$$= \frac{Mb^2}{2} (1 + \beta) \dot{\varphi}^2 \quad (19)$$

3.

$$U = Mgb(1 - \cos \varphi) \quad (20)$$

4. 拘束力および摩擦力は仕事をせず , 重力はポテンシャルなので , Lagrange の運動方程式を用いることができる .

$$Mb^2(1 + \beta)\ddot{\varphi} + Mgb \sin \varphi = 0 \quad (21)$$

を得る . (力学的エネルギー保存の法則を用いて良い . $K + U = \text{constant}$ を時間微分してから , $\dot{\varphi}$ で割ると式 (21) を得る .)

$\varphi \ll 1$ のとき , $\sin \varphi \sim \varphi$ より ,

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{b(1 + \beta)} \varphi = 0 \quad (22)$$

よって ,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{b(1 + \beta)}} \quad (23)$$

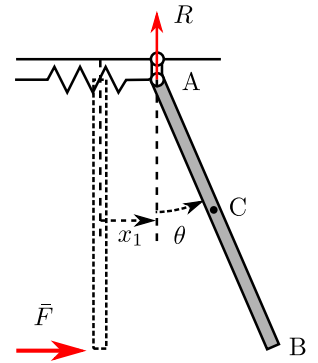
5. それぞれの物体に対応する β を求める . 「1. 円盤」のとき $\beta_1 = 1/2$, 「2. 円輪」のとき $\beta_2 = 1$, 「3. 球体」のとき $\beta_3 = 2/5$ となる . (円輪の慣性モーメントは , 慣性モーメントの定義 $I = \sum m_i r_i^2$ において , $r_i = R$ より , $I = MR^2$ と容易に計算できる .) 「4. 内部に半径 $a/2$ の円孔がある円盤」のときは $\beta_1 < \beta_4 < \beta_2$ の間の値をとる . (質量が外側に集中している方が慣性モーメントは大きくなる . このことを考えると , 外側に質量が集中している円輪の慣性モーメントが大きく , 内部まで一様な円盤の慣性モーメントが小さいことは計算なしで予想可能である .) なお , 参考までに , 円孔の中心がちょうど真ん中にあるときの慣性モーメントは

$$I_4 = \frac{M}{\left(a^2 - \left(\frac{1}{2}a \right)^2 \right) \pi} \int_{\frac{1}{2}a}^a \int_0^{2\pi} r^2 r dr d\theta \quad (24)$$

$$= \frac{4M}{3a^2\pi} \frac{1}{4} \frac{15a^4}{16} 2\pi = \frac{5}{8} Ma^2 \quad (25)$$

となり $\beta_4 = 5/8$ である . これより , $\beta_3 < \beta_1 < \beta_4 < \beta_2$ となる . よって , $\omega_3 > \omega_1 > \omega_4 > \omega_2$ となる .

問 3. 質量 M 、長さ $2l$ で密度一様な剛な棒の 2 つの端点をそれぞれ点 A、点 B とし、質量中心の位置を点 C とする。この棒の点 A をカーテンレールのランナーに取り付ける。ランナーはカーテンレールを摩擦なく水平に移動可能であり、棒は点 A で摩擦なく回転運動可能である。静止状態の棒に対して、点 B に水平方向に撃力 $\bar{F}$ を与えたときの運動について考える。重力加速度は g とする。棒と鉛直方向のなす角を θ 、バネの伸びを x_1 とする。また、 x 方向の正を水平右向き、 y 方向の正を鉛直上向きに取る。以下の問いに答えよ。



1. 棒の長さが $2l$ であることに注意して、点 A および点 C まわりの慣性モーメント I_A, I_C をそれぞれ求めよ。(l, M)
2. バネ定数が大きく、点 A が固定されているとみなせる場合（つまり、常に $x_1 = 0$ のとき）を考える。
 - (a) 撃力を与えた直後の A 点まわりにおける角速度 ω_1 を求めよ。($l, M, \bar{F}$)
 - (b) 撃力を与えた直後の運動エネルギー K_1 を求めよ。($l, M, \bar{F}$)
 - (c) 棒の質量中心が最も高い位置にくるときの質量中心の高さ y_h を求めよ。ただし、静止状態において質量中心の高さは $y = 0$ とする。($l, M, g, \bar{F}$)
 - (d) 点 A まわりの回転の方程式を求めよ。(l, g, t, θ)
3. バネ定数が k で与えられ、点 A が水平方向に動く場合を考える。
 - (a) 撃力を与えた直後の質量中心の速度の水平方向成分 v_2 を求めよ。($l, M, \bar{F}$)
 - (b) 撃力を与えた直後の質量中心まわりの角速度 ω_2 を求めよ。($l, M, \bar{F}$)
 - (c) 質量中心における x 方向の運動方程式を立てよ。(x_1, θ, l, M, t, k)
 - (d) 質量中心における y 方向の運動方程式を立てよ。A 点に作用する鉛直上向きの抵抗力を R とする。(θ, l, M, t, g, R)
 - (e) 質量中心における回転の方程式を立てよ。($x_1, \theta, l, M, t, k, g, R$)
 - (f) $\theta \ll 1, \dot{\theta} \ll 1$ と仮定し、 $\cos \theta \sim 1, \sin \theta \sim \theta, \theta^2 \sim 0, \dot{\theta}^2 \sim 0$ として計算したところ、小問 3.(c),(d),(e) から下記の 2 式を得た。（この式の導出は不要である。）この 2 式から想像できるように、この運動は連成振動する。基準振動の角振動数 $\omega_h, \omega_l (\omega_h > \omega_l)$ を求めよ。ただし、 $\frac{k}{M} = \frac{\omega_0^2}{4}, \frac{g}{l} = \frac{\omega_0^2}{3}$ とする。(ω_0)

$$\ddot{x} + 4 \frac{k}{M} x_1 - 3 \frac{g}{l} (l\theta) = 0,$$

$$\ddot{\theta} - 3 \frac{k}{M} x_1 + 3 \frac{g}{l} (l\theta) = 0$$

コメントと解答

1.

$$I_A = \frac{M}{2l} \int_0^{2l} x^2 dx = \frac{4}{3} Ml^2 \quad (26)$$

$$I_C = \frac{M}{2l} \int_{-l}^l x^2 dx = \frac{1}{3} Ml^2 \quad (27)$$

(28)

2.

(a) 回転の方程式より、 $I_A \omega_1 = 2l\bar{F}$ となる。

$$\omega_1 = \frac{2l\bar{F}}{I_A} = \frac{3\bar{F}}{2Ml} \quad (29)$$

(b)

$$K_1 = \frac{I_A}{2} \omega_1^2 = \frac{1}{2} \frac{4Ml^2}{3} \frac{9\bar{F}^2}{4M^2l^2} = \frac{3\bar{F}^2}{2M} \quad (30)$$

(c) 力学的エネルギー保存の法則より、 $U|_{y=y_h} = Mgy_h = K_1$ が言える。

$$y_h = \frac{K_1}{Mg} = \frac{3\bar{F}^2}{2M^2g} \quad (31)$$

(d) $I_A \ddot{\theta} = N$ より、

$$\frac{4}{3} Ml^2 \ddot{\theta} = -Mgl \sin \theta \quad (32)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{4l} \sin \theta = 0 \quad (33)$$

おまけ

y_h を運動方程式から導出してみる。式 (33) の答えは楕円方程式になるので、 θ が微小だと思って解いてみる。 $\theta \ll 1$ と仮定すると、 $\sin \theta \sim \theta$ および衝突時の時刻 $t = 0$ で $\theta = 0$ より、 $\theta = A \sin \sqrt{\frac{3g}{4l}} t$ を得る。 $t = 0$ で $\dot{\theta} = \omega_1$ より、 $A = \frac{\sqrt{3}\bar{F}}{M\sqrt{gl}}$ つまり、 θ が最大となる角度は $\theta = \frac{\sqrt{3}\bar{F}}{M\sqrt{gl}}$ である。質量中心の高さは、 $y = l(1 - \cos \theta)$ で得られる。 $\theta \ll 1$ のとき、 $\cos \theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}$ となるので、 $y_h = \frac{3\bar{F}^2}{2M^2g}$ を得る。この答えは、式 (31) と同じである。（ θ が微小という仮定を使ったので同じ値になるとは限らないが、近い値をとるはずである。今回の例では同じ値になっている。）

3.

(a) $Mv_2 = \bar{F}$ より,

$$v_2 = \frac{\bar{F}}{M} \quad (34)$$

(b) A 点では鉛直方向にしか力が作用しないので, 棒に加わる力積は $\bar{F}$ のみ. $I_C\omega_2 = l\bar{F}$ より,

$$\omega_2 = \frac{l\bar{F}}{I_C} = \frac{3\bar{F}}{Ml} \quad (35)$$

(c) 質量中心の座標を (x_2, y_2) とおく. 静止状態における棒の質量中心を原点とおく (どこを原点としても良い),

$$x_2 = x_1 + l \sin \theta, \quad y_2 = l(1 - \cos \theta) \quad (36)$$

となる.

x 方向の運動方程式は, $M\ddot{x}_2 = -kx_1$ である. また, $x_2 = x_1 + l \sin \theta$ より, 次式を得る.

$$\ddot{x}_1 + l \cos \theta \cdot \ddot{\theta} - l \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 = -\frac{k}{M}x_1 \quad (37)$$

(d) x 方向の運動方程式は, $M\ddot{y}_2 = R - Mg$ である. また, $y_2 = l(1 - \cos \theta)$ より, 次式を得る.

$$l(\sin \theta \cdot \ddot{\theta} + \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2) = \frac{R}{M} - g \quad (38)$$

(e) 重力は質量中心に集中して作用してると考えることができるので, 重力によるモーメントは 0 になる. 抵抗力 R とバネの復元力 kx_1 によるモーメントを考えると, 質量中心まわりの回転の方程式は, $I_C\ddot{\theta} = -Rl \sin \theta + kx_1l \cos \theta$ となる.

$$\ddot{\theta} = -\frac{3R \sin \theta}{Ml} + \frac{3k \cos \theta x_1}{Ml} \quad (39)$$

(f) $x = Ae^{i\omega t}$, $l\theta = Be^{i\omega t}$ として計算する. (θ に l をかけて長さの単位にしておいた方が解答の表記が簡単になるので, ここでは $l\theta$ をひとつの変数のように扱っている. もちろん, θ を変数として解いても同じ答えが得られる.)

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\frac{3}{4}\omega_0^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (40)$$

A, B が非自明解を持つためには行列式が 0 でなければならない. よって,

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)(-\omega^2 + \omega_0^2) - \frac{3}{4}\omega_0^2\omega_0^2 = 0 \quad (41)$$

$$\omega^2 = \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\omega_0^2 \quad (42)$$

$$\omega_h = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\omega_0, \quad \omega_l = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\omega_0 \quad (43)$$

おまけ

記載の 2 式の導出は不要だが, 参考までに計算を以下に記す.

式 (37) より,

$$\ddot{x}_1 + l\ddot{\theta} = -\frac{k}{M}x_1 \quad (44)$$

式 (38) より,

$$\theta\ddot{\theta} = \frac{R}{M} - g \quad (45)$$

式 (39) より,

$$\ddot{\theta} = -\frac{3R}{Ml}\theta + \frac{3k}{Ml}x_1 \quad (46)$$

式 (46) に式 (45) を代入し, l を乗じる.

$$l\ddot{\theta} = -\frac{3g}{l}l\theta + \frac{3k}{M}x_1 \quad (47)$$

式 (44) から式 (47) を引くと,

$$\ddot{x}_1 = 3\frac{g}{l}l\theta - \frac{4k}{M}x_1 \quad (48)$$