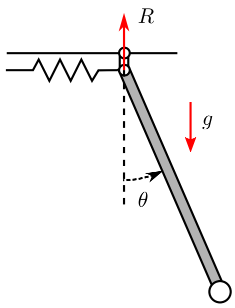
一般力学 (T1・T2) 14 回目レポート **(2015/ 7/27 10:25 a.m. 締め切り)**

氏名 ______________________ 学籍番号 ______________________

問 1. カーテンレールのランナーに長さ l で質量を無視できる剛な棒の端点をひっかける．その棒のもう一方の端点に質量 m の質点をつける．カーテンレール上のランナーには右図のようにバネ定数 k のバネが取り付けられているものとする．摩擦は作用しないものとする．棒と鉛直方向のなす角度を θ とする．$\theta \ll 1$ とし，$\sin\theta \sim \theta, \cos\theta \sim 1$ が成り立つ．また，$\dot{\theta}$ は十分小さく，無視できるものとする．

1. バネが自然長のとき，ランナーの位置を原点とする．質点の位置 (x_2, y_2) をランナーの位置 x_1 と棒と鉛直方向のなす角 θ を用いて表せ．
2. 棒は質量がないので，棒と質点が一体となった物体の質量中心は棒の端点（質点のあるところ）である．この質量中心に関して，x 方向の運動方程式を立てよ．（授業で導出した方程式が得られるはずである．）
3. y 方向の運動方程式から，ランナーが棒に対して与える拘束力を R を求めよ．
4. 原点まわりの質点の角運動量を求めよ．（このあと微分するので，微小項は考慮しないこと．）
5. 原点周りの回転の方程式を立てよ．（授業で導出した方程式が得られるはずである．）



解答

1.

$$x_2 = x_1 + l\sin\theta \tag{1}$$
$$y_2 = -l\cos\theta \tag{2}$$

それぞれ時間微分すると次の式を得る．

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + l\cos\theta\cdot\dot{\theta} \tag{3}$$
$$\dot{y}_2 = l\sin\theta\cdot\dot{\theta} \tag{4}$$

2.　x 方向に作用する力はバネの復元力のみであるので，以下の式を得る．

$$m\ddot{x}_2 = -kx_1 \tag{5}$$

式 (3) より，

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + l\cos\theta\cdot\ddot{\theta} - l\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 \tag{6}$$

である．式 (5) と (6) より，微小項を考慮して，

$$\underline{\ddot{x}_1 + l\ddot{\theta} + \frac{k}{m}x_1 = 0} \tag{7}$$

を得る．

3.　y 方向に作用する力は，拘束力 R と重力 mg である．

$$m\ddot{y}_2 = R - mg \tag{8}$$

式 (4) より，

$$\ddot{y}_2 = -l\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 + l\sin\theta\cdot\ddot{\theta} \tag{9}$$

である．式 (8) と (9) より，微小項を考慮して，

$$\underline{R = ml\theta\cdot\ddot{\theta} + mg} \tag{10}$$

を得る．

4.

$$l_z = m\left(x_2\dot{y}_2 - y_2\dot{x}_2\right) \tag{11}$$
$$= m\left[\left(x_1 + l\sin\theta\right)\left(l\sin\theta\cdot\dot{\theta}\right) - \left(-l\cos\theta\right)\left(\dot{x}_1 + l\cos\theta\cdot\dot{\theta}\right)\right] \tag{12}$$
$$= ml\left[x_1\sin\theta\cdot\dot{\theta} + l\sin^2\theta\cdot\dot{\theta} + \dot{x}_1\cos\theta + l\cos^2\theta\cdot\dot{\theta}\right] \tag{13}$$
$$= \underline{ml\left(x_1\sin\theta\cdot\dot{\theta} + l\dot{\theta} + \dot{x}_1\cos\theta\right)} \tag{14}$$

5.

原点まわりの回転の方程式は次のように書ける．

$$\dot{l}_z = x_1 R - x_2 mg \tag{15}$$
$$= x_1 R - (x_1 + l\sin\theta)\, mg \tag{16}$$

左辺を計算する．

$$\dot{l}_z = ml\left(\dot{x}_1 \sin\theta \cdot \dot{\theta} + x_1 \cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 + x_1 \sin\theta \cdot \ddot{\theta} + l\ddot{\theta} + \ddot{x}_1 \cos\theta - \dot{x}_1 \sin\theta \cdot \dot{\theta}\right) \tag{17}$$
$$= ml\left(x_1 \cos\theta \cdot \dot{\theta}^2 + x_1 \sin\theta \cdot \ddot{\theta} + l\ddot{\theta} + \ddot{x}_1 \cos\theta\right) \tag{18}$$

微小項を考慮すると，

$$\dot{l}_z = ml\left(x_1\theta \cdot \ddot{\theta} + l\ddot{\theta} + \ddot{x}_1\right) \tag{19}$$

を得る．式 (16) に式 (10), (19) を代入すると，

$$\underline{l\ddot{\theta} + \ddot{x}_1 + g\theta = 0} \tag{20}$$

を得る．