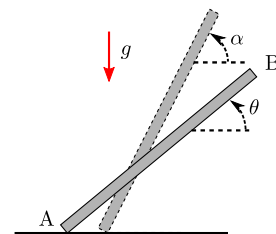


氏名

学籍番号

問 1. 質量 M , 長さ $2l$ の棒を手で支え, 机となす角 α で静止させている. この棒をそっと離して, その後の運動を観察する. 机と棒の間には摩擦は働かないとして, 以下の問いに答えよ.

1. 棒の線密度は一様とする. 質量中心まわりの慣性モーメントを書け.
2. 質量中心の運動方程式を x 方向, y 方向それぞれ書け. ただし, 床からの拘束力は R , 重力加速度は g とする.
3. 質量中心まわりの回転の方程式を書け. ただし, θ は棒と水平方向のなす角とする.
4. $\theta = 0$ となるとき, 点 B の速度を求めよ.
5. 拘束力 R を M, g, l, α, θ を用いて表せ. ($\dot{\theta}, \ddot{\theta}$ は用いてはならない.)
6. 拘束力が常に正の値となることを確認せよ.



解答

1.

$$I = \frac{M}{2l} \int_{-l}^l x^2 dx = \frac{1}{3} Ml^2 \quad (1)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6g(\cos \alpha - \cos \theta)}{l(3 \cos^2 \theta + 1)} \quad (10)$$

2.

$$M\ddot{x} = 0 \quad (2)$$

$$M\ddot{y} = R - Mg \quad (3)$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g \cos \alpha}{2l}} \quad (11)$$

3. 反時計まわりを正とする.

$$I\ddot{\theta} = -Rl \cos \theta \quad (4)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{3R \cos \theta}{Ml} \quad (5)$$

B 点の速度は「重心の速度の y 方向成分」と「回転による速度」の和で表される. 前者は式 (8) に $\theta = 0$ を代入することにより, $\dot{y} = l\dot{\theta}$ を得る. 後者は質量中心から点 B までの長さ l と角速度の積で表されるので, $\omega = l\dot{\theta}$ である.

$$v = l\dot{\theta} + l\dot{\theta} = \sqrt{6gl \cos \alpha} \quad (12)$$

4. 床からの拘束力 R は仕事をしないので, 力学的エネルギーは保存する.

$$\frac{M}{2} \dot{y}^2 + \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 + Mgl \cos \theta = Mgl \cos \alpha \quad (6)$$

$$y = l \sin \theta \quad (7)$$

より,

$$\dot{y} = l \cos \theta \cdot \dot{\theta} \quad (8)$$

5. 式 (8) より,

$$\ddot{y} = l \cos \theta \cdot \ddot{\theta} - l \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 \quad (13)$$

を得る. これを式 (3) に代入すると,

$$Ml \cos \theta \cdot \ddot{\theta} - Ml \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 = R - Mg \quad (14)$$

となる. 式 (5), (10) を代入すると,

$$-3R \cos^2 \theta - Mg \sin \theta \cdot \frac{6(\cos \alpha - \cos \theta)}{(3 \cos^2 \theta + 1)} = R - Mg \quad (15)$$

$$\left(\frac{M}{2} l^2 \sin^2 \theta + \frac{Ml^2}{6} \right) \dot{\theta}^2 + Mgl \cos \theta = Mgl \cos \alpha \quad (9)$$

$$R = Mg \frac{6 \sin \theta (\cos \theta - \cos \alpha) + (3 \cos^2 \theta + 1)}{(3 \cos^2 \theta + 1)^2} \quad (16)$$

$\sin \theta \geq 0, \cos \theta - \cos \alpha \geq 0$ より, $R > 0$ となる.