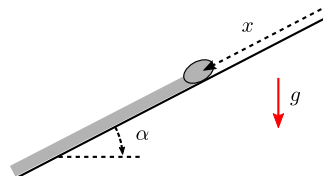


氏名

学籍番号

問 1. 水平となす角 α の斜面の上に一様に雪が積もっている．この雪が $t = 0$ の時に滑り始めた．右図に示すように雪の塊は前方にある雪と一体になりながら滑る．積もっている雪は雪の塊が到達するまでは静止しているものとする．また，積もっている雪の単位長さあたりの密度を ρ とし，重力加速度を g とする．以下の問に答えよ．ただし，微小量の 2 次以上の項は無視して良い．

1. 時刻 t において，雪の塊は距離 x 滑っており，このときの雪の塊の質量は ρx である．また，速度を v とする．時刻 t における斜面方向（下向きを正とする）の運動量を書け．
2. 時刻 $t + \Delta t$ における雪の塊の速度を $v + \Delta v$ とする．時刻 $t + \Delta t$ における斜面方向の運動量を書け．
3. 時刻 t から $t + \Delta t$ の間に雪の塊に作用する斜面方向の重力による力積を求めよ．
4. 雪の塊が x だけ滑り落ちた時の速度 v を求めよ．



解答

1.

$$p(t) = \rho x v \quad (1)$$

あとは，この微分方程式を解けばよい．速度 v を位置 x の関数とすると，次の関係を得る．

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \quad (8)$$

2.

$$p(t + \Delta t) = \rho (x + v \Delta t) (v + \Delta v) \quad (2)$$

これより，

$$v^2 + x v \frac{dv}{dx} = x g \sin \alpha \quad (9)$$

3.

$$\bar{F} = \rho x g \sin \alpha \Delta t \quad (3)$$

である．両辺に x を乗じる．

$$x v^2 + x^2 v \frac{dv}{dx} = x^2 g \sin \alpha \quad (10)$$

4. 運動方程式より

$$p(t + \Delta t) - p(t) = \bar{F} \quad (4)$$

すると，左辺が一つの項で表される．

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2 v^2) = x^2 g \sin \alpha \quad (11)$$

である．この式に式 (1), (2), (3) を代入すると，

$$\rho (x + v \Delta t) (v + \Delta v) - \rho x v = \rho x g \sin \alpha \Delta t \quad (5)$$

x に関して積分すると，

$$x^2 v^2 = \frac{2}{3} x^3 g \sin \alpha + C \quad (12)$$

を得る．二次以上の微小項を無視すると次の式を得る．

$$v^2 \Delta t + x \Delta v = x g \sin \alpha \Delta t \quad (6)$$

を得る． $t = 0$ で $x = 0, v = 0$ であるので， $C = 0$ である．よって，

$\Delta t \rightarrow 0$ として，微分を考える．

$$v^2 + x \frac{dv}{dt} = x g \sin \alpha \quad (7)$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{3} x g \sin \alpha} \quad (13)$$