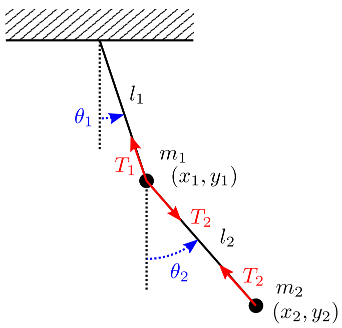
一般力学 (T1・T2) 10 回目レポート　　**(2015/ 6/22 10:25 a.m. 締め切り)**

氏名 ______________　学籍番号 ______________

問 1.　右図のような 2 重振り子を考える．上にある質点を質点 1，下にある質点を質点 2 と呼ぶ．重力加速度を g とする．以下の問に答えよ．



1. 右図に示すように張力 T_1, T_2 が作用している．質点 1，質点 2 における y 方向の運動方程式を書け．
2. 質点 1，質点 2 における x 方向の運動方程式を書け．
3. $\theta_1, \theta_2 \ll 1$ と仮定する．$\theta \ll 1$ のとき，$\cos\theta \sim 1$ となることを利用して T_1, T_2 を m_1, m_2, g を用いて表せ．
4. $\sin\theta_1 = \dfrac{x_1}{l_1}, \sin\theta_2 = \dfrac{x_2 - x_1}{l_2}$ である．質点 1，質点 2 における x 方向の運動方程式を行列とベクトルを用いて表わせ．($\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の形で表わせ．) 使って良い変数は $x_1, x_2, m_1, m_2, l_1, l_2, g$ とする．
5. $l_1 = 2l, l_2 = 3l, m_1 = 2m, m_2 = m$ とする．$x_1 = A\cos(\omega t + \delta)$, $x_2 = B\cos(\omega t + \delta)$ と仮定して，解の規準振動数を求めよ．
6. それぞれの規準振動を図示せよ．

解答

1.

$$\underline{m_1\ddot{y}_1 = -T_1\cos\theta_1 + T_2\cos\theta_2 + m_1 g} \tag{1}$$
$$\underline{m_2\ddot{y}_2 = -T_2\cos\theta_2 + m_2 g} \tag{2}$$

2.

$$\underline{m_1\ddot{x}_1 = -T_1\sin\theta_1 + T_2\sin\theta_2} \tag{3}$$
$$\underline{m_2\ddot{x}_2 = -T_2\sin\theta_2} \tag{4}$$

3.　$y_1 = l_1\cos\theta_1$, $y_2 = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2$ である．$\cos\theta \sim 1$ を用いるとこれらの 2 階微分は 0 になる．つまり，式 (1), (2) より，

$$0 = -T_1 + T_2 + m_1 g \tag{5}$$
$$0 = -T_2 + m_2 g \tag{6}$$

となる．これより，次式を得る．

$$T_2 = \underline{m_2 g} \tag{7}$$
$$T_1 = T_2 + m_1 g = \underline{(m_1 + m_2)\,g} \tag{8}$$

4.　式 (3), (4) に $\sin\theta_1 = \dfrac{x_1}{l_1}, \sin\theta_2 = \dfrac{x_2 - x_1}{l_2}$ を代入する．

$$m_1\ddot{x}_1 = -(m_1 + m_2)g\frac{x_1}{l_1} + m_2 g\frac{x_2 - x_1}{l_2} \tag{9}$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -m_2 g\frac{x_2 - x_1}{l_2} \tag{10}$$

これをまとめると，

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \overline{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}}^{\,\cdot\cdot} + \begin{bmatrix} \dfrac{(m_1+m_2)g}{l_1} + \dfrac{m_2 g}{l_2} & -\dfrac{m_2 g}{l_2} \\ -\dfrac{m_2 g}{l_2} & \dfrac{m_2 g}{l_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

となる．

5.　$l_1 = 2l, l_2 = 3l, m_1 = 2m, m_2 = m$ を式 (3), (4) に代入する．

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overline{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}}^{\,\cdot\cdot} + \begin{bmatrix} \dfrac{11g}{6l} & -\dfrac{g}{3l} \\ -\dfrac{g}{3l} & \dfrac{g}{3l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{12}$$

$x_1 = A\cos(\omega t + \delta)$, $x_2 = B\cos(\omega t + \delta)$ と仮定して，

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{11g}{6l} & -\dfrac{g}{3l} \\ -\dfrac{g}{3l} & \dfrac{g}{3l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{13}$$

となる．これをまとめると，

$$\begin{bmatrix} \frac{11g}{6l} - \omega^2 & -\frac{g}{3l} \\ -\frac{g}{3l} & \frac{g}{3l} - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{14}$$

を得る．A, B が非自明な解[*1]を持つためには，式 (14) の行列の行列式が 0 でなければならない[*2]よって，以下の特性方程式を解けば良い．

$$\left(\frac{11g}{6l} - 2\omega^2\right)\left(\frac{g}{3l} - \omega^2\right) \tag{15}$$

まとめると以下のようになる．

$$-\frac{g}{3l}\frac{g}{3l} = 0 \tag{16}$$

$$(\omega^2)^2 - \frac{5}{4}\omega^2 + \frac{1}{4} = 0 \tag{17}$$

二次方程式を解くと，次の解を得る．

$$\omega^2 = \frac{g}{l}, \quad \frac{g}{4l} \tag{18}$$

角振動数は正の値を取るので，

$$\underline{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}} \tag{19}$$

となる．

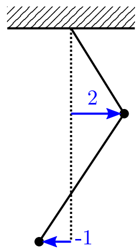
6. $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ のとき，

$$\begin{bmatrix} -\frac{g}{6l} & -\frac{g}{3l} \\ -\frac{g}{3l} & -\frac{2g}{3l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = 0 \tag{20}$$

よって，

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{21}$$

図示すると，以下のようになる．



また，$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$ のとき

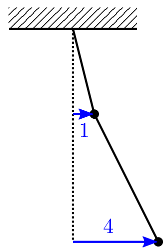
(22)

$$\begin{bmatrix} \frac{4g}{3l} & -\frac{g}{3l} \\ -\frac{g}{3l} & \frac{g}{12l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = 0 \tag{23}$$

よって，

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \end{Bmatrix} \tag{24}$$

図示すると，以下のようになる．



[*1] $A = B = 0$ ではない解

[*2] 行列式が非零だと，この行列が逆行列が持つことになり，$A = B = 0$ となる．