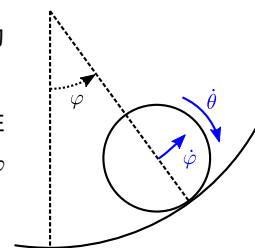


氏名

学籍番号

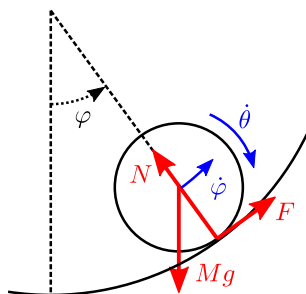
問 1. 「半径 b の完全に固定された円筒」の中に「半径 a , 質量 M で密度が一様な円柱」を置く . 円柱が平面運動するとき , 以下の問に答えよ .

1. 円柱は右側に進んでいる . 図に摩擦力 F , 拘束力 N , 重力 Mg を描き込め . (g は重力加速度である .)
2. 円筒の中心を原点とする極座標系を考え , 運動方程式を書け . なお , 円筒の中心と円柱の中心を結ぶ直線と鉛直方向のなす角を φ , 円柱の角速度を $\dot{\theta}$ とする . ただし , 角度 φ は反時計まわりを正とし , 角度 θ は時計まわりを正とする .
3. 円柱の回転の方程式を書け .
4. $\dot{\varphi}$ と $\dot{\theta}$ の関係を長さ a , b を用いて表せ .
5. $\varphi \ll 1$ のとき , 円柱は微小振動する . 角振動数を求めよ .



解答

1. 赤い矢印が力のベクトルを表している*1 .



2. 半径方向の座標を r とおくと , 極座標系における運動方程式は以下のようになる .

$$M(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -N + Mg \cos \varphi \quad (1)$$

$$M(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = F - Mg \sin \varphi \quad (2)$$

半径方向には常に $r = b - a$ で一定であるので ,

$$\frac{-M(b-a)\dot{\varphi}^2}{M(b-a)\ddot{\varphi}} = \frac{-N + Mg \cos \varphi}{F - Mg \sin \varphi} \quad (3)$$

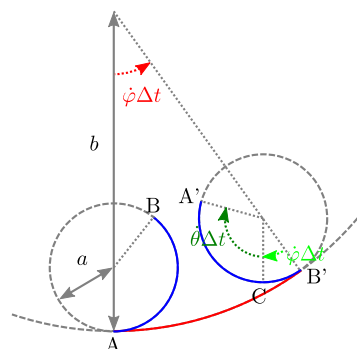
$$\ddot{\varphi} = \frac{F - Mg \sin \varphi}{b-a} \quad (4)$$

となる .

3. 円柱の回転の方程式は , 以下の通りである .

$$\frac{1}{2}Ma^2\ddot{\theta} = -aF \quad (5)$$

4. 導出方法その 1 (変位の関係を用いる .)



Δt の間に円柱と接する円筒の円周上の距離は $b\dot{\varphi}\Delta t$ (赤線) である . 一方 , 円柱が円筒と接する距離は $a(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\Delta t$ (青線) である*2 . この両者が等しいので ,

$$a\dot{\varphi}\Delta t = b(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\Delta t \quad (6)$$

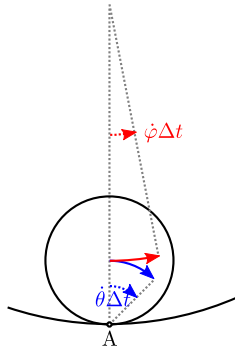
となる . まとめて , 次式を得る .

$$(b-a)\dot{\varphi} = a\dot{\theta} \quad (7)$$

導出方法その 2 (速度の関係を用いる .)

*1 摩擦力 F は滑らないように作用することに注意し , 方向を決める .

*2 点 A から点 B までが円筒と接する . 右側の円において点 C は点 A があったところである . 弧 CA' の距離が $b\dot{\theta}\Delta t$, 弧 B'C の距離が $b\dot{\varphi}\Delta t$ である . 青線の長さは , 弧 B'A' であるので , これらの和で表される .



ある瞬間だけに着目すると、円柱は接地点 A を中心に回転運動している。(円柱における接地点 A は速度 0 であり、点 A 以外の領域は速度を持って運動している。) この瞬間的に回転の中心になっている点を、「瞬時回転中心」という。点 A から円柱の重心を見ると、速度 $b\dot{\theta}$ で運動している(青の実戦の矢印)。(重心から見ると点 A が速度 $b\dot{\theta}$ で運動している。) 一方、円筒の中心から見るとこの円筒は速度 $(b-a)\dot{\varphi}$ で運動している(赤の実戦の矢印)。この 2 つの速度が等しいので、

$$(b-a)\dot{\varphi} = a\dot{\theta} \quad (8)$$

となる。

未知数が φ, θ, F, N で 4 つ。方程式は (3)–(4) の 4 本である。抗力 N を計算する必要がなければ、 φ, θ, F の 3 つの未知数に対して、3 本の方程式 (5), (4), (7) を使えば良い。

5. 式 (5), (7) より

$$F = -\frac{Ma^2}{a}\ddot{\theta} = -\frac{Ma^2}{a}\frac{b-a}{a}\ddot{\varphi} = -\frac{M}{2}(b-a)\ddot{\varphi} \quad (9)$$

を得る。式 (3) に代入すると、

$$M(b-a)\ddot{\varphi} = -\frac{M}{2}(b-a)\ddot{\varphi} - Mg \sin \varphi \quad (10)$$

を得る。まとめると、

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{3}\frac{g}{b-a} \sin \varphi = 0 \quad (11)$$

となる。 $\varphi \ll 1$ のとき、 $\sin \varphi \sim \varphi$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{3}\frac{g}{b-a} \varphi = 0 \quad (12)$$

となる。よって、角振動数は、

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{b-a}} \quad (13)$$

となる^{*3}。

さて、式 (9) と式 (11) から、

$$F = -\frac{M}{2}(b-a) \cdot \left(-\frac{2}{3}\frac{g}{b-a} \sin \varphi \right) \quad (14)$$

$$= \frac{Mg}{3} \sin \varphi \quad (15)$$

であるので、 $\varphi > 0$ のとき、 $F > 0$ となる。これより小問 1 で描いたベクトル F の向きは正しいことが分かる。

^{*3} 微分方程式 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ は単振動を表す。この微分方程式を解くと、 $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ となる。これより、この単振動の角振動数は ω であることが分かる。例えば、バネの方程式 $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ の角振動数は $\sqrt{\frac{k}{m}}$ となる。また、振り子の式 $\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$ の場合、角振動数は $\sqrt{\frac{g}{l}}$ となる。