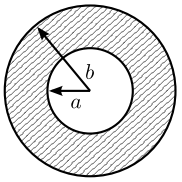
一般力学 (T1・T2) 7 回目レポート　　**（2015/ 6/1 10:25 a.m. 締め切り）**

氏名　　学籍番号

問 1.

ドーナツ状の円盤がある．外径は b で，内径は a である（$b > a$）．質量は M で，綿密度 ρ は均一とする．この物体の中心まわりの慣性モーメントを M, b, a を用いて表わせ．また，（質量 M を一定として,）$a \to 0$ としたとき，円盤の慣性モーメントと等しくなることを確認せよ．



解答

密度は均一なので，以下のように表される．

$$\rho = \frac{M}{(b^2 - a^2)\,\pi} \tag{1}$$

慣性モーメントは定義より，

$$I = \int_S \rho \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}S \tag{2}$$

となる．x, y をそれぞれ以下のように置き換えると，

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{3}$$

慣性モーメントは，

$$I = \frac{M}{(b^2 - a^2)\,\pi} \int_a^b \int_0^{2\pi} r^2 r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{4}$$

$$= \frac{M}{(b^2 - a^2)\,\pi} \frac{b^4 - a^4}{4} 2\pi \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2} M \left(b^2 + a^2\right) \tag{6}$$

となる．$a \to 0$ で慣性モーメント

$$I = \frac{1}{2} M b^2 \tag{7}$$

となり，円盤の慣性モーメントと等しくなることが分かる．

また，$a \to b$ とすると，

$$I = M b^2 \tag{8}$$

となる．これはリング（円柱）の慣性モーメントに等しい．