

氏名

学籍番号

問 1. 質量 m_i の質点が速度 $\dot{\mathbf{r}}_i$ で運動している質点系を考える．質点系の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$

で与えられる．この質点系の運動エネルギーを質量中心の位置 $\mathbf{r}_c$ および質量中心からの位置 $\mathbf{r}'_i$ を用いて表せ．
 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i$ である．質量 m_i の総和を M とする．

解答

$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i$ を代入すると，運動エネルギーは次のように表される．

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{r}}_c + \dot{\mathbf{r}}'_i) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_c + \dot{\mathbf{r}}'_i) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_c \cdot \dot{\mathbf{r}}_c + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_c \cdot \dot{\mathbf{r}}'_i \right. \quad (2)$$

$$\left. + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_c + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}}'_i \right) \quad (3)$$

右辺括弧内の第 2 項，第 3 項は，0 となる．なぜなら，

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \mathbf{0} \quad (4)$$

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \mathbf{0} \quad (5)$$

となるからである．

結局運動エネルギーとして以下の式を得る．

$$K = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_c \cdot \dot{\mathbf{r}}_c + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}}'_i \quad (6)$$

右辺第一項は，質量中心に質量が集中したと考えたときの質点の運動エネルギーである．右辺第二項は，質量中心からみた質点系の相対的な運動の運動エネルギーである．