

氏名

学籍番号

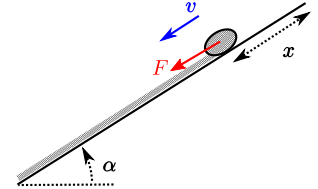
各小問の最後に書かれた括弧内の変数の一部あるいはすべてを用いて答えよ。

極座標の運動方程式  $F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2), \quad F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$

回転座標系における運動方程式  $m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2x', \quad m\ddot{y}' = F_{y'} - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2y'$

Lagrange の運動方程式  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (L = K - U)$

問 1. 角度  $\alpha$  の斜面上を、雪の塊が斜面上の雪を巻き込みながら、滑り落ちる運動を考える。雪の塊が距離  $x$  滑ったとき、以下の物理量あるいは方程式を求めよ。以下の問に答えよ。



- 雪の塊の運動量  $p$  を求めよ。ただし、速度は  $v (= \frac{dx}{dt})$ 、斜面上にある雪の単位長さあたりの質量は  $\rho$  で一定とする。  $(\rho, x, v)$
- 雪の塊に作用する力（重力）の斜面に沿った成分  $F$  を求めよ。  $(\rho, x, v, g, \alpha)$
- 雪の塊の運動方程式を書け。  $(\rho, x, v, g, \alpha, t)$
- 雪の塊の速度  $v$  を求めよ。ただし、 $x = 0$  で  $v = 0$  とする。  $(x, g, \alpha)$   
(ヒント 微分方程式  $\frac{d(xv)}{dt} = x$  は、両辺に  $x$  を乗じ、 $\frac{d}{dt} = v \frac{d}{dx}$  の関係式を使うことで、 $xv \frac{d(xv)}{dx} = x^2$  と変形できる。)

解答

1. としても良い。

雪の塊の質量は  $\rho x$ 、速度は  $v$  なので、

$$p = \rho x v \quad (1) \quad 4. \quad \text{ヒントと同様の計算を行うと、}$$

$$xv \frac{d(xv)}{dx} = x^2 g \sin \alpha \quad (5)$$

2. 雪の塊に作用する斜面方向の外力  $F$  は以下の通り。

$$F = \rho x g \sin \alpha \quad (2) \quad \text{を得る。積分すると、}$$

$$\frac{1}{2} (xv)^2 = \frac{1}{3} x^3 g \sin \alpha + C \quad (6)$$

3.  $\dot{p} = F$  より、

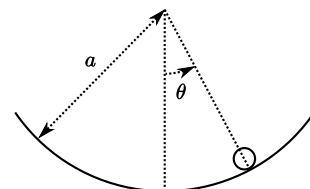
$$\frac{d(\rho x v)}{dt} = \rho x g \sin \alpha \quad (3) \quad x = 0 \text{ で } v = 0 \text{ より } C = 0 \text{ である。よって、}$$

あるいは、 $\rho$  を消して、

$$v = \sqrt{\frac{2}{3} x g \sin \alpha} \quad (7)$$

$$\frac{d(xv)}{dt} = x g \sin \alpha \quad (4) \quad \text{を得る。}$$

問 2. 半径  $a$  の固定された円筒の中（底部）で質量  $M$  の球が左右に周期的に運動している．この運動の周期を計算したい．右図に示すように，円筒の中心を原点  $O$  とし，原点と質点を結ぶ直線が鉛直方向となす角を  $\theta$  とする．また，重力加速度を  $g$  とする．以下の問に答えよ．



図：質点とみなしたとき

1. 簡単のため，球が十分小さく質点とみなせるとし，摩擦が作用しないと仮定することとした．

(a) 原点まわりの球の角運動量  $l$  を書け． $(M, a, g, \dot{\theta})$

(b) 原点まわりの力のモーメント  $N$  を書け． $(M, a, g, \theta)$

(c)  $\theta \ll 1$  のとき，この運動の角振動数  $\omega$  を求めよ． $(M, a, g)$

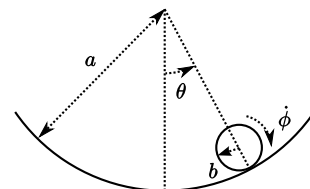
2. 前述の方法では実測した値とかけ離れていたため，球を剛体として考えることとした．球の半径は  $b$  で均質であると仮定する．また，球は円筒上を滑らず転がるものとし，円筒が球に与える摩擦力を  $F$  とする．球の回転の角速度を  $\dot{\phi}$  とする（時計まわりを正とする）．

(a) 球の重心における運動方程式を書け． $(M, a, b, g, F, \theta, \ddot{\theta})$

(b) 球の重心まわりの回転の方程式を書け． $(M, b, g, F, \phi, \ddot{\phi})$

(c) ふたつの角速度  $\dot{\theta}$  と  $\dot{\phi}$  の関係を  $a, b$  を用いて表わせ． $(a, b, \dot{\theta}, \dot{\phi})$

(d)  $\theta \ll 1$  のとき，この運動の角振動数  $\omega$  を求めよ． $(M, a, b, g)$



図：剛体とみなしたとき

解答

1.(a)

2.(a)

$$l = \underline{Ma^2\dot{\theta}} \quad (8)$$

$$\underline{M(a-b)\ddot{\theta} = -Mg \sin \theta + F} \quad (13)$$

1.(b)

2.(b)

$$N = \underline{-Mga \sin \theta} \quad (9)$$

$$\underline{\frac{2}{5}Mb^2\ddot{\phi} = -bF} \quad (14)$$

1.(c)

2.(c)

$\dot{l} = N$  および， $\sin \theta \sim \theta$  より，

$$Ma^2\ddot{\theta} = -Mga\theta \quad (10)$$

$$\underline{(a-b)\dot{\theta} = b\dot{\phi}} \quad (15)$$

整理して，

2.(d) 式 (13), (14), (15) より次式を得る．

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\theta = 0 \quad (11)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{5g}{7(a-b)}\theta = 0 \quad (16)$$

を得る．よって，角振動数は

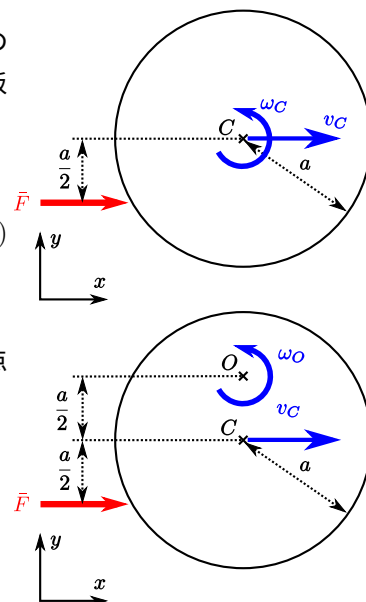
よって，

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{a}} \quad (12)$$

$$\underline{\omega = \sqrt{\frac{5g}{7(a-b)}}} \quad (17)$$

である．

問 3. 水平な面上に半径  $a$  , 質量  $M$  の静止した円盤がある . 円盤は均質である . この円盤に , 右図のように , 撃力  $\bar{F}$  を与える . 水平な面と円盤の間には摩擦は作用しないと仮定するとき , 以下の問に答えよ .



1. (a) 質量中心  $C$  まわりの慣性モーメント  $I_C$  を書け .  $(M, a)$   
 (b) 撃力  $\bar{F}$  を与えた後の質量中心  $C$  における  $x$  方向の速度  $v_C$  を求めよ .  $(\bar{F}, a, M)$   
 (c) 撃力  $\bar{F}$  を与えた後の質量中心  $C$  まわりの角速度  $\omega_C$  を求めよ .  $(\bar{F}, a, M)$   
 (d) 撃力  $\bar{F}$  を与えた後の運動エネルギーを求めよ .  $(\bar{F}, a, M)$
2. 右図のように , 原点  $O$  で円盤を固定した状態で撃力を与える場合を考える . 固定点と円盤の間には摩擦は作用しないと仮定する .  
 (a) 原点  $O$  まわりの慣性モーメント  $I_O$  を求めよ .  $(M, a)$   
 (b) 撃力  $\bar{F}$  を与えた直後の質量中心における  $x$  方向の速度  $v_C$  を求めよ .  $(\bar{F}, a, M)$   
 (c) 撃力  $\bar{F}$  を与えた後の原点  $O$  まわりの角速度  $\omega_O$  を求めよ .  $(\bar{F}, a, M)$   
 (d) 撃力  $\bar{F}$  を与えた後の運動エネルギーを求めよ .  $(\bar{F}, a, M)$

解答

1.(a)

$$I_C = \frac{1}{2}Ma^2 \quad (18)$$

1.(b)  $Mv_C = \bar{F}$  より ,

$$v_C = \frac{\bar{F}}{M} \quad (19)$$

1.(c)  $I\omega_C = \frac{a}{2}\bar{F}$  より ,

$$\omega_C = \frac{a\bar{F}}{2I} = \frac{\bar{F}}{Ma} \quad (20)$$

1.(d)

$$\begin{aligned} K &= \frac{M}{2}v_C^2 + \frac{I}{2}\omega_C^2 \\ &= \frac{\bar{F}^2}{2M} + \frac{\bar{F}^2}{4M} = \frac{3}{4}\frac{\bar{F}^2}{M} \end{aligned} \quad (21)$$

2.(a) 平行軸の定理を用いる .

$$I_O = I_C + M\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}Ma^2 \quad (22)$$

2.(c) 先に角速度を求める . (2.(c) に先に答える)  $I\omega_O = a\bar{F}$  より ,

$$\omega_O = \frac{a\bar{F}}{I} = \frac{4}{3}\frac{\bar{F}}{Ma} \quad (23)$$

2.(b) 原点  $O$  を中心に角速度  $\omega_O$  で回転運動しているので ,

$$v_C = a\omega_O = \frac{4}{3}\frac{\bar{F}}{M} \quad (24)$$

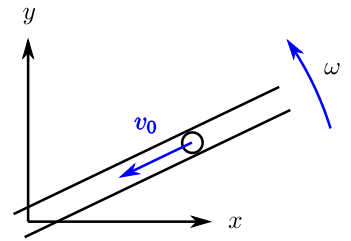
を得る .

2.(d) 回転運動のみしているので , 次式のように求められる .

$$K = \frac{I}{2}\omega_O^2 = \frac{2\bar{F}^2}{3M} \quad (25)$$

問 4.

右図に示すように、筒の中に質量  $m$  の小さな球（質点）がある．この筒を原点を中心に水平面内で一定の角速度  $\omega$  で回転させる．原点から質点までの距離を  $r$  とおく．時刻  $t = 0$  において、 $r = r_0$ 、 $\dot{r} = -v_0$  ( $v_0 > 0$ ) である．筒と質点には摩擦は作用しないと仮定するとき、以下の問に答えよ．



- 時刻  $t$  におけるこの質点の位置  $r$  を求めよ．( $t, m, \omega, r_0, v_0$ )
- 時刻  $t$  において筒が質点に与える力  $S$  を求めよ．( $t, m, \omega, r_0, v_0$ )
- ある時刻  $t = t_1$  において質点は「原点に近づく運動」から「原点から遠ざかる運動」に変わった．この時刻  $t_1$  を求めよ．ただし、質点の初速  $v_0$  は十分小さく、原点を通過することはないと仮定する．( $m, \omega, r_0, v_0$ )
- 前問で求めた時刻  $t = t_1$  における運動エネルギーを求めよ．( $t_1, m, \omega, r_0, v_0$ )

解答

1. 回転座標系を用いる．筒が質点を押す力を  $S$  とする．

この式を式 (27) に代入にすると、

$$m\ddot{r} = m\omega^2 r \quad (26)$$

$$S = \frac{2m\omega(\omega r_0 \sinh \omega t - v_0 \cosh \omega t)}{2} \quad (35)$$

$$0 = S - 2m\omega\dot{r} \quad (27)$$

3.

式 (26) より、

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \quad (28)$$

$$0 = \omega r_0 \sinh \omega t_1 - v_0 \cosh \omega t_1 \quad (36)$$

$$= \omega r_0 \frac{e^{\omega t_1} - e^{-\omega t_1}}{2} - v_0 \frac{e^{\omega t_1} + e^{-\omega t_1}}{2} \quad (37)$$

を得る．また、

$$\dot{r} = \omega(Ae^{\omega t} - Be^{-\omega t}) \quad (29)$$

$$= \frac{1}{2} \{ (\omega r_0 - v_0) e^{\omega t_1} - (\omega r_0 + v_0) e^{-\omega t_1} \} \quad (38)$$

である．

$t = 0$  において、 $r = r_0$ 、 $v = v_0$  より、

$$A + B = r_0 \quad (30)$$

$$\omega(A - B) = -v_0 \quad (31)$$

$$e^{\omega t_1} = \sqrt{\frac{\omega r_0 + v_0}{\omega r_0 - v_0}} \quad (39)$$

両辺対数をとって、

$$\omega t_1 = \ln \left( \sqrt{\frac{\omega r_0 + v_0}{\omega r_0 - v_0}} \right) \quad (40)$$

よって、

$$A = \frac{1}{2} \left( r_0 - \frac{v_0}{\omega} \right) \quad B = \frac{1}{2} \left( r_0 + \frac{v_0}{\omega} \right) \quad (32)$$

よって、次式を得る．

$$t_1 = \frac{1}{2\omega} \ln \left( \frac{\omega r_0 + v_0}{\omega r_0 - v_0} \right) \quad (41)$$

となる．これより、

$$r = r_0 \cosh \omega t - \frac{v_0}{\omega} \sinh \omega t \quad (33)$$

2. 時間微分すると次式を得る．

$$\dot{r} = \omega r_0 \sinh \omega t - v_0 \cosh \omega t \quad (34)$$

4.  $\dot{r} = 0$  より、半径方向の速度は 0．周方向の半径は  $\omega r_1$  である．よって、

$$K = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} \omega^2 r_1^2 = \frac{m\omega^2}{2} \left( r_0 \cosh \omega t_1 - \frac{v_0}{\omega} \sinh \omega t_1 \right)^2 \quad (42)$$