

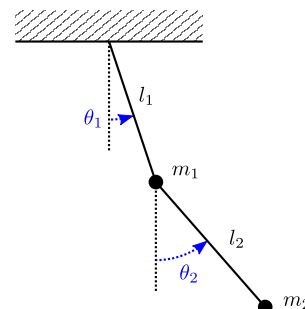
2014/07/28 10 a.m. 締め切り

返却を希望する場合は丸で囲む ⇒ 返却希望

氏名

問 1. 右図のような 2 重振り子を考える．上にある質点を質点 1，下にある質点を質点 2 と呼ぶ．重力加速度を g とする．以下の問に答えよ．

1. 質点 1 および質点 2 の運動エネルギーの和 K を求めよ．
2. 質点 1 および質点 2 のポテンシャルエネルギーの和 U を求めよ．(どこを基準にとっても良い．)
3. ラグランジュの運動方程式を用いて，質点 1 および質点 2 の運動方程式を導出せよ．



解答

1. 質点 1 の速度 v_1 は

$$v_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \quad (1)$$

質点 2 の速度 v_2 は

$$v_2 = (l_1 + l_2) \dot{\theta}_1 + l_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \quad (2)$$

$$= l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 \\ &= \frac{m_1}{2} (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{m_2}{2} (l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

2. 質点 1 および質点 2 のポテンシャルエネルギー U_1 ， U_2 は，天井で $U_1 = U_2 = 0$ とすると，以下のようになる．

$$U_1 = -m_1 g l_1 \cos \theta_1 \quad (5)$$

$$U_2 = -m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \quad (6)$$

これより，2 つの質点のポテンシャルエネルギーは以下の通りである．

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ &= -m_1 g l_1 \cos \theta_1 - m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \end{aligned} \quad (7)$$

3. まず， $L = K - U$ とおく．

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \quad (8)$$

を計算すると，

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) l_1 g \sin \theta_1 = 0 \quad (9)$$

を得る． l_1 で割って整理すると，

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 = 0 \quad (10)$$

を得る．同様に θ_2 についても以下の式を計算する．

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \quad (11)$$

$$m_2 l_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0 \quad (12)$$

l_2 で割ると，次式を得る．

$$m_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2) + m_2 g \sin \theta_2 = 0 \quad (13)$$