一般力学（T1T2） 11 回目レポート　　　　　　　　　　　　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2014/07/07　10 a.m. 締め切り

返却を希望する場合は丸で囲む　$\Rightarrow$　返却希望

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

計算機（パソコン）を用いてグラフを描け．グラフの描画ソフトは問わない．なお，式の導出は不要である．グラフのみで構わない．

問 1．　質量 m の質点に復元力 $-kx$ および抵抗力 $-c\dot{x}$ が作用するとき，運動方程式は

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + {\omega_0}^2 = 0$$

とかける．ここに，$2\beta = c/m$, ${\omega_0}^2 = k/m$ である．β の値がそれぞれ，$\beta = 0$, $\omega_0/5$, ω_0, $2\omega_0$ のとき，縦軸を x，横軸を t とするグラフを描け．ただし，$t = 0$ において，$x = 0$, $\dot{x} = 1$ とする．また，$\omega_0 = 1$ とする．

問 2．　質量 m の質点に復元力 $-kx$，抵抗力 $-c\dot{x}$ および外力 $F\sin\hat{\omega}t$ が作用するとき，運動方程式は

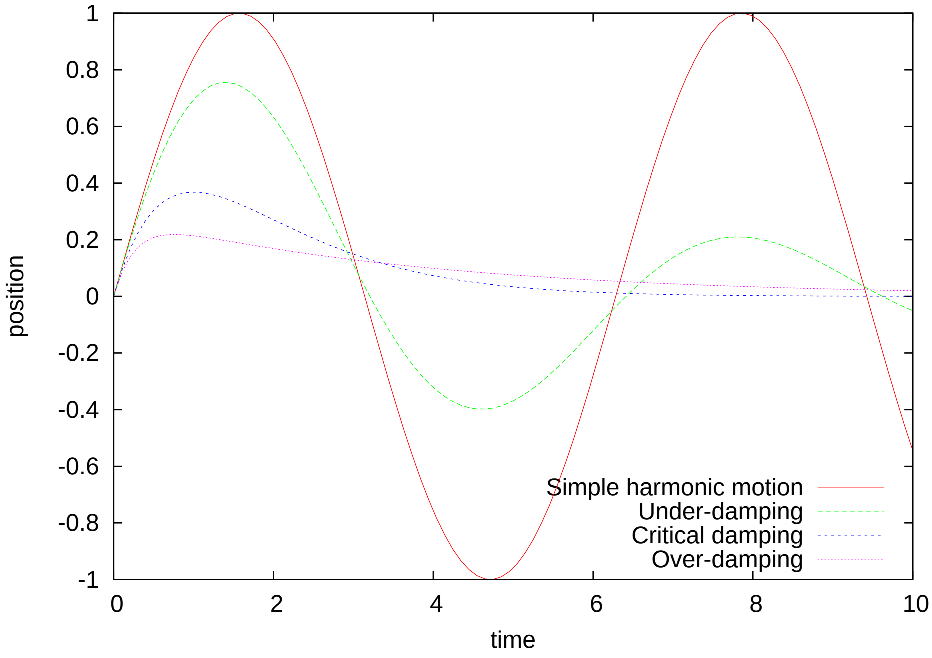
$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + {\omega_0}^2 = \rho\sin\hat{\omega}t$$

とかける．ここに，$\rho = F/m$ である．上述の方程式の特解を $x = A\sin(\hat{\omega}t + \delta)$ とおくと，

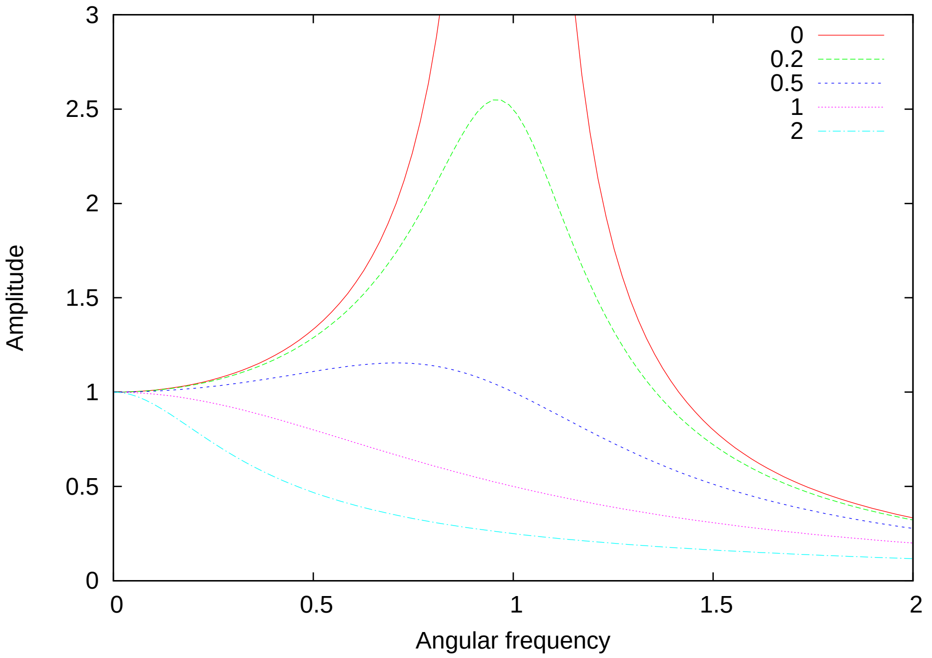
$$A = \frac{\rho}{\sqrt{\left({\omega_0}^2 - \hat{\omega}^2\right)^2 + \left(2\beta\hat{\omega}\right)^2}} \quad , \qquad \delta = \tan^{-1}\frac{2\beta\hat{\omega}}{{\omega_0}^2 - \hat{\omega}^2}$$

となる．β の値がそれぞれ，$\beta = 0$, $\omega_0/5$, $\omega_0/2$, ω_0, $2\omega_0$ のとき，縦軸を ${\omega_0}^2A/\rho$，横軸を $\hat{\omega}/\omega_0$ とするグラフを描け．

問 1　解答


position
time
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
2
4
6
8
10
Simple harmonic motion
Under-damping
Critical damping
Over-damping

問 2　解答


Amplitude
Angular frequency
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
0
0.2
0.5
1
2

問 1　解説

(i)
$\beta = 0$ のとき

$$x = \sin \omega_0 t \tag{1}$$

(ii) $\beta = \omega_0/5$ のとき，減衰振動となる．
減衰振動の一般解は,

$$x = e^{-\beta t} C \sin\left(\sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}\, t + \delta\right) \tag{2}$$

$t = 0$ で $x = 0$ より $\delta = 0$.

$$\begin{aligned}\dot{x} =& -\beta e^{-\beta t} C \sin\left(\sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}\, t\right)\\ &+ e^{-\beta t} C \sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2} \cos\left(\sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}\, t\right)\end{aligned} \tag{3}$$

$t = 0$ で $\dot{x} = 1$ より

$$1 = \dot{x}(t = 0) = C\sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2} \tag{4}$$

よって，$C = \dfrac{1}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}}$ これより,

$$x = \frac{e^{-\beta t}}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}} \sin\left(\sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}\, t\right) \tag{5}$$

(iii) $\beta = \omega_0$ のとき，限界減衰となる．
限界減衰の一般解は,

$$x = e^{-\beta t} (A + Bt) \tag{6}$$

$t = 0$ で $x = 0$ より $A = 0$.
速度は以下の通り．

$$\dot{x} = -\beta e^{-\beta t} (A + Bt) + B e^{-\beta t} \tag{7}$$

$t = 0$ で $\dot{x} = 1$ より

$$1 = \dot{x}(t = 0) = B \tag{8}$$

$$x = t e^{-\beta t} \tag{9}$$

(iv) $\beta = 2\omega_0$ のとき，過減衰となる．
過減衰の一般解は,

$$x = e^{-\beta t} \left(A e^{\sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}\, t} + B e^{-\sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}\, t}\right) \tag{10}$$

$t = 0$ で $x = 0$ より $A + B = 0$.
速度は以下の通り．

$$\begin{aligned}\dot{x} =& \left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}\right) A e^{\left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}\right) t}\\ &+ \left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}\right) B e^{\left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}\right) t}\end{aligned} \tag{11}$$

$t = 0$ で $\dot{x} = 1$ より

$$\begin{aligned}1 =& \dot{x}(t = 0)\\ =& \left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}\right) A + \left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}\right) B\end{aligned} \tag{12}$$

よって，次式を得る．

$$A = -B = \frac{1}{2\sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}} \tag{13}$$

これより,

$$x = \frac{e^{-\beta t}}{\sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}} \sinh\left(\sqrt{\beta^2 - {\omega_0}^2}\, t\right) \tag{14}$$

問 2　解説

以下の式をプロットすればよい．

$$\frac{{\omega_0}^2 A}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\dfrac{\hat{\omega}}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + 2\beta \left(\dfrac{\hat{\omega}}{\omega_0}\right)^2}} \tag{15}$$

gnuplot を用いた場合のコマンドを以下に示す.

問 1　例

```
gnuplot> set xlabel 'time'
gnuplot> set ylabel 'position'
gnuplot> set key bottom right
gnuplot> plot [0:]sin(x) title 'Simple harmonic motion' ,\
exp(-x/5)*1/sqrt(24./25.)*sin(sqrt(24./25.)*x) title 'Under-damping',\
x*exp(-x) title 'Critical damping',\
exp(-2*x)/sqrt(3)*sinh(sqrt(3)*x) title 'Over-damping'
gnuplot> set term postscript eps color 18
gnuplot> set output 'damping.eps'
gnuplot> replot
```

問 2　例

```
gnuplot> f(x,b)=1./sqrt((1.-x**2)**2+(2.*b*x)**2)
gnuplot> set xlabel 'Angular frequency'
gnuplot> set ylabel 'Amplitude'
gnuplot> plot [0:2][0:3] f(x,0) title '0', f(x,0.2) title '0.2',\
     f(x,0.5) title '0.5',f(x,1) title '1',f(x,2) title '2'
gnuplot> set term postscript eps color 18
gnuplot> set output 'forced_oscillation.eps'
gnuplot> replot
```