

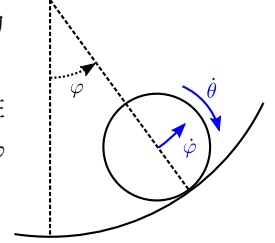
2014/06/30 10 a.m. 締め切り

返却を希望する場合は丸で囲む ⇒ 返却希望

氏名

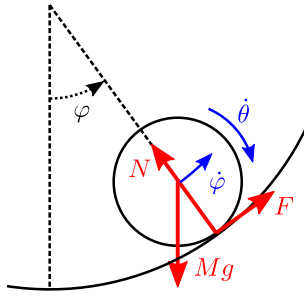
問 1. 「半径  $b$  の完全に固定された円筒」の中に「半径  $a$ , 質量  $M$  で密度が一様な円柱」を置く. 円柱が平面運動するとき, 以下の問に答えよ.

1. 円柱は右側に進んでいる. 図に摩擦力  $F$ , 拘束力  $N$ , 重力  $Mg$  を描き込め. ( $g$  は重力加速度である.)
2. 円筒の中心を原点とする極座標系を考え, 運動方程式を書け. なお, 円筒の中心と円柱の中心を結ぶ直線と鉛直方向のなす角を  $\varphi$ , 円柱の角速度を  $\dot{\theta}$  とする. ただし, 角度  $\varphi$  は 半時計回り を正とし, 角度  $\theta$  は 時計回り を正とする.
3. 円柱の回転の方程式を書け.
4.  $\dot{\varphi}$  と  $\dot{\theta}$  の関係を長さ  $a$ ,  $b$  を用いて表せ.
5.  $\varphi \ll 1$  のとき, 円柱は微小振動する. 角振動数を求めよ.



## 解答

1. 赤い矢印が力のベクトルを表している\*1.



2. 半径方向の座標を  $r$  とおくと, 極座標系における運動方程式は以下のようになる.

$$M(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -N + Mg \cos \varphi \quad (1)$$

$$M(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = F - Mg \sin \varphi \quad (2)$$

半径方向には常に  $r = b - a$  で一定であるので,

$$-M(b-a)\dot{\varphi}^2 = -N + Mg \cos \varphi \quad (3)$$

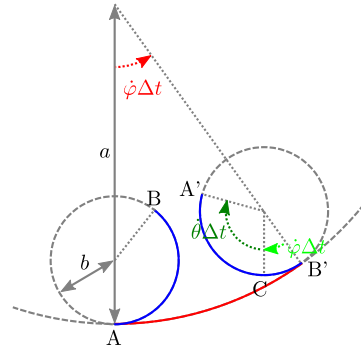
$$M(b-a)\ddot{\varphi} = F - Mg \sin \varphi \quad (4)$$

となる.

3. 円柱の回転の方程式は, 以下の通りである.

$$\frac{1}{2}Ma^2\ddot{\theta} = -aF \quad (5)$$

4. 導出方法その 1 (変位の関係を用いる.)



$\Delta t$  の間に円柱と接する円筒の円周上の距離は  $a\dot{\varphi}\Delta t$  (赤線) である. 一方, 円柱が円筒と接する距離は  $b(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\Delta t$  (青線) である\*2. この両者が等しいので,

$$a\dot{\varphi}\Delta t = b(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\Delta t \quad (6)$$

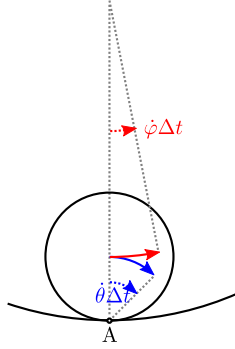
となる. まとめると, 次式を得る.

$$(b-a)\dot{\varphi} = a\dot{\theta} \quad (7)$$

\*1 摩擦力  $F$  は滑らないように作用することに注意し, 方向を決める.

\*2 点 A から点 B までが円筒と接する. 右側の円において点 C は点 A があったところである. 弧 CA' の距離が  $b\dot{\theta}\Delta t$ , 弧 B'C の距離が  $b\dot{\varphi}\Delta t$  である. 青線の長さは, 弧 B'A' であるので, これらの和で表される.

導出方法その2（速度の関係を用いる.）



ある瞬間だけに着目すると、円柱は接地点 A を中心に回転運動している。（円柱における接地点 A は速度 0 であり、点 A 以外の領域は速度を持って運動している。）この瞬間的に回転の中心になっている点を、「瞬時回転中心」という。点 A から円柱の重心を見ると、速度  $b\dot{\theta}$  で運動している（青の実戦の矢印）。（重心から見ると点 A が速度  $b\dot{\theta}$  で運動している。）一方、円筒の中心からみるとこの円筒は速度  $(b-a)\dot{\varphi}$  で運動している（赤の実戦の矢印）。この2つの速度が等しいので、

$$(b-a)\dot{\varphi} = a\dot{\theta} \quad (8)$$

となる。

未知数が  $\varphi, \theta, F, N$  で4つ。方程式は (3)–(4) の4本である。抗力  $N$  を計算する必要がなければ、 $\varphi, \theta, F$  の3つの未知数に対して、3本の方程式 (5), (4), (7) を使えば良い。

5. 式 (5), (7) より

$$F = -\frac{Ma^2}{a}\ddot{\theta} = -\frac{Ma^2}{a}\frac{b-a}{a}\ddot{\varphi} = -\frac{M}{2}(b-a)\ddot{\varphi} \quad (9)$$

を得る。式 (3) に代入すると、

$$M(b-a)\ddot{\varphi} = -\frac{M}{2}(b-a)\ddot{\varphi} - Mg \sin \varphi \quad (10)$$

を得る。まとめると、

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{3}\frac{g}{b-a} \sin \varphi = 0 \quad (11)$$

となる。 $\varphi \ll 1$  のとき、 $\sin \varphi \sim \varphi$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{3}\frac{g}{b-a} \varphi = 0 \quad (12)$$

となる。よって、角振動数は、

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{b-a}} \quad (13)$$

となる。

さて、式 (9) と式 (11) から、

$$F = -\frac{M}{2}(b-a) \cdot \left( -\frac{2}{3}\frac{g}{b-a} \sin \varphi \right) \quad (14)$$

$$= \frac{Mg}{3} \sin \varphi \quad (15)$$

であるので、 $\varphi > 0$  のとき、 $F > 0$  となる。これより小問1で描いたベクトル  $\mathbf{F}$  の向きは正しいことが分かる。