一般力学（T1T2） 9 回目レポート　　　　学籍番号

2014/06/23　10 a.m. 締め切り

返却を希望する場合は丸で囲む　⇒　返却希望

氏名

問 1.　長さ L の棒の一端を点 O に固定し，振り子運動（平面運動）をさせる．棒の線密度は一様であるとし，質量を M とする．棒には重力のみが作用するものとし，重力加速度を g とおく．以下の問に答えよ．

1. 固定点 O まわりの慣性モーメントを求めよ．
2. 棒が鉛直方向と角度 θ をなすとき，点 O まわりの重力によるモーメントを求めよ．
3. 角度 θ が常に微小 ($\sin\theta \sim \theta$) であるとき，この棒は単振動する．角度 θ を時刻 t を用いて表せ．ただし，時刻 $t=0$ において，$\theta=\theta_0, \dot{\theta}=0$ とする．
4. 角度 $\theta=0$ のとき，運動エネルギーを求めよ．ただし，角度 θ は常に微小とする．

解答

1. 線密度を ρ とおく．

$$I = \int_0^L \rho x^2 \mathrm{d}x = \frac{\rho L^3}{3} = \underline{\frac{ML^2}{3}} \tag{1}$$

2. 微小区間 $\mathrm{d}x$ に作用するモーメントは $-(\rho\mathrm{d}x)gx\sin\theta$ である．これを積分する．

$$N = -\rho g \sin\theta \int_0^L x\ \mathrm{d}x \tag{2}$$

$$= -\rho g \frac{L^2}{2}\sin\theta = \underline{-\frac{MLg}{2}\sin\theta} \tag{3}$$

3. 回転の方程式から

$$\dot{L} = I\ddot{\theta} = N \tag{4}$$

となる．$\sin\theta \sim \theta$ より，

$$N = -\frac{MLg}{2}\sin\theta \tag{5}$$

である．これより，次式を得る．

$$\frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} = -\frac{MLg}{2}\theta \tag{6}$$

まとめると

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\theta = 0 \tag{7}$$

となる．これより，

$$\theta = A\cos\sqrt{\frac{3g}{2L}}t + B\sin\sqrt{\frac{3g}{2L}}t \tag{8}$$

$t=0$ において，$\theta=\theta_0, \dot{\theta}=0$ となるので，

$$\underline{\theta = \theta_0\cos\sqrt{\frac{3g}{2L}}t} \tag{9}$$

を得る．

4. 運動エネルギーは以下で与えられる．

$$K = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \tag{10}$$

また，角度が微小であるので，前問の計算で得た式 (9) を用いて，角速度が計算できる．

$$\dot{\theta} = \theta_0\sqrt{\frac{3g}{2L}}\sin\sqrt{\frac{3g}{2L}}t \tag{11}$$

$\theta=0$ のとき

$$\dot{\theta} = \theta_0\sqrt{\frac{3g}{2L}} \tag{12}$$

となる．

よって，

$$\underline{K = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{3}{\theta_0}^2\frac{3g}{2L} = \frac{mLg{\theta_0}^2}{4}} \tag{13}$$

を得る．