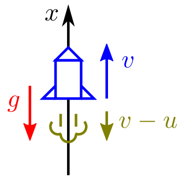
一般力学（T1T2） 6 回目レポート

2014/06/02 10 a.m. 締め切り

返却を希望する場合は丸で囲む ⇒ 返却希望

学籍番号 ______________________

氏名 ______________________



問 1. 単位時間あたり質量 μ の燃料を相対速度 u で下方に噴出しながら上昇するロケットがある．ただし，x は鉛直上向きを正にとる．また，重力加速度を g とする．なお，$t=0$ において，ロケットの質量は $m(t=0)=m_0$，速度は $v(t=0)=0$ である．以下の問に答えよ．

1. 時刻 t におけるロケットの質量 $m_{\mathrm{r}}(t)$ を求めよ．ただし，ロケットの質量にはロケット内の燃料も含む．
2. 時刻 t におけるロケットの速度を v とする．時刻 t におけるロケットの運動量 $P_{\mathrm{r}}(t)$ を求めよ．
3. 時刻 $t+\Delta t$ におけるロケットの質量 $m_{\mathrm{r}}(t+\Delta t)$ を求めよ．
4. 時刻 $t+\Delta t$ におけるロケットの速度を $v+\Delta v$ とする．時刻 $t+\Delta t$ におけるロケットの運動量 $P_{\mathrm{r}}(t+\Delta t)$ を求めよ．2 次の微小項は無視して良い．
5. 時刻 t から $t+\Delta t$ の間に噴出される燃料の質量 $m_{\mathrm{f}}(t+\Delta t)$ を求めよ．
6. 時刻 t から $t+\Delta t$ の間に噴出される燃料の時刻 $t+\Delta t$ における運動量 $P_{\mathrm{f}}(t+\Delta t)$ を求めよ．2 次の微小項は無視して良い．
7. 時刻 t から $t+\Delta t$ の間に，ロケットおよびその間に噴出した燃料に対して重力が与える力積 $\bar{F}$ を求めよ．
8. 時刻 t から $t+\Delta t$ の運動量の変化量がその間に与えられた力積と等しいことを用いて，時刻 t における速度 v を求めよ．

解答

1.

$$m_{\mathrm{r}}(t) = m_0 - \mu t \tag{1}$$

2.

$$P_{\mathrm{r}}(t) = (m_0 - \mu t)\, v \tag{2}$$

3.

$$m_{\mathrm{r}}(t + \Delta t) = m_0 - \mu\,(t + \Delta t) \tag{3}$$

4.

$$P_{\mathrm{r}}(t + \Delta t) = [m_0 - \mu\,(t + \Delta t)]\,(v + \Delta v) \tag{4}$$

2 次の微小項を消去すると，次式を得る．（消去しなくても良い．）

$$P_{\mathrm{r}}(t + \Delta t) \sim (m_0 - \mu t)\,(v + \Delta v) - \mu v \Delta t \tag{5}$$

5.

$$m_{\mathrm{f}} = \mu \Delta t \tag{6}$$

6.　時刻 t から $t + \Delta t$ でロケットの速度は，v から $v + \Delta v$ に変化する．燃料は相対速度 u で後方に噴出されるので，燃料の速度は $v - u$ から $v + \Delta v - u$ の値を取る．つまり，この時間における燃料の速度の平均速度は，$v + \alpha \Delta v - u$ で表される．α は 0 から 1 までの適当な値である．よって，燃料の運動エネルギーは次式で与えられる．

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{f}}(t + \Delta t) &= \mu \Delta t\,(v + \alpha \Delta v - u) && (7) \\ &\sim \mu \Delta t\,(v - u) && (8) \end{aligned}$$

7.　時刻 t 以降にロケットと噴出される燃料の質量の和は，$m_0 - \mu t$ である．つまり，

$$\bar{F} = -\,(m_0 - \mu t)\, g \Delta t \tag{9}$$

である．

8.　題意より，

$$P_{\mathrm{r}}(t + \Delta t) + P_{\mathrm{f}}(t + \Delta t) - P_{\mathrm{r}}(t) = \bar{F} \tag{10}$$

である．これを計算すると，

$$(m_0 - \mu t)\,\Delta v - \mu u \Delta t = -\,(m_0 - \mu t)\, g \Delta t \tag{11}$$

$\Delta t \to 0$ とすると，

$$(m_0 - \mu t)\,\mathrm{d}v - \mu u \mathrm{d}t = -\,(m_0 - \mu t)\, g \mathrm{d}t \tag{12}$$

となる．これを変数分離で解く．

$$\mathrm{d}v = \left(\frac{\mu u}{m_0 - \mu t} - g \right) \mathrm{d}t \tag{13}$$

両辺積分して，

$$v = -u \ln (m_0 - \mu t) - g t + C \tag{14}$$

$t = 0$ において $v = 0$ より C が決まる．

$$v = u \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t} - g t \tag{15}$$