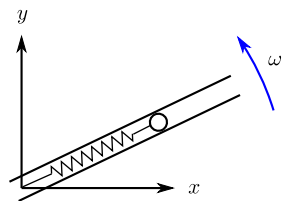


氏名

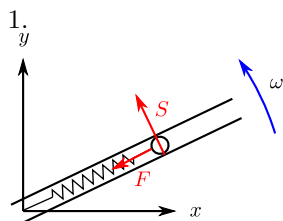
学籍番号

問 1. 図に示すように, 筒の中に質量 m の質点 (小さな球) があり, その質点はバネ定数 k のバネで原点と結ばれている. この筒を原点を中心に 水平面内 で一定の角速度 ω で回転させる. 原点から質点までの距離を r とおく. 時刻 $t = 0$ において, $r = r_0$, $\dot{r} = 0$ であり, 筒は x 軸と重なっている. また, バネは $t = 0 (r = r_0)$ のとき自然長である. 筒と質点には摩擦は作用しないと仮定するとき, 以下の問に答えよ.



1. 筒が質点に対して与える力 S , およびバネが質点に与える力 F を図中に描け.
2. 筒と x' 軸が重なる回転座標系を考える. このとき, x' 軸方向の運動方程式を (m, k, r, r_0, ω) を用いて表せ.
3. この質点が単振動するための条件を (m, k, ω) を用いて書け.
4. この質点が単振動するとき, r を (m, k, r_0, ω, t) を用いて表せ.

解答



を得る.

3. 式 (3) の両辺を m で割る.

$$\ddot{r} = -\frac{k}{m}(r - r_0) + r\omega^2 \quad (4)$$

整理すると,

2. x' 方向の運動方程式は以下の通り^{*1}.

$$m\ddot{r} = -F + mr\omega^2 \quad (1)$$

バネが質点に与える力はフックの法則より

$$F = k(r - r_0) \quad (2)$$

である. これより,

$$m\ddot{r} = -k(r - r_0) + mr\omega^2 \quad (3)$$

となる. これより, 単振動するためには,

$$\frac{k}{m} - \omega^2 > 0 \quad (6)$$

となる必要があることが分かる^{*2}.

^{*1} $r = x'$ であることに注意.

^{*2} 実際に $r = e^{\lambda t}$ において計算すると, $\frac{k}{m} - \omega^2 > 0$ のとき, λ が虚数を含む形で表され, 単振動することが分かる. λ が実数となるときは, 単振動しない.

4. 式 (3) を解く．非斉次の線形微分方程式は，特解と
斉次線形微分方程式の一般解の和で表される．

まず，式 (3) の右辺を 0 としたときの斉次線形微分方程
式の一般解を求める． $r = e^{\lambda t}$ とおくと，

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} \quad (7)$$

を得る．これより，一般解は

$$r = A \cos \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} t \quad (8)$$

となる*3．

特解は， $r = C$ とおくことにより求める．式 (3) に
 $r = C$ を代入すると，

$$\left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) C = \frac{k}{m} r_0 \quad (9)$$

よって，

$$C = \frac{kr_0}{k - m\omega^2} \quad (10)$$

これより，式 (3) の一般解は，

$$r = A \cos \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} t + \frac{kr_0}{k - m\omega^2} \quad (11)$$

となる．

初期条件 $r(t=0) = r_0$ および $\dot{r}(t=0) = 0$ を考慮す
ると，係数 A, B が得られる．

計算すると，

$$r = \frac{r_0}{-\omega^2 + \frac{k}{m}} \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \cos \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} t \right) \quad (12)$$

を得る．(多分.)

*3 $C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} t} = (C_1 + C_2) \cos \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} t + (C_1 - C_2) \sin \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} t$