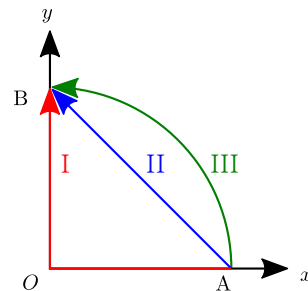


氏名

学籍番号

問 1. 質点が $F_x = axy, F_y = by^2$ の力を受けている. この質点が点 A から点 B まで運動する. 点 A および点 B の座標はそれぞれ $(R, 0), (0, R)$ である. このとき, 以下の問に答えよ.

1. 線分 AO, OB を通るとき (経路 I), 力のなす仕事を求めよ.
2. 線分 AB を通るとき (経路 II), 力のなす仕事を求めよ.
3. 半径 R の弧 AB を通るとき (経路 III), 力のなす仕事を求めよ.



解答

仕事の定義を元に, 経路積分を行う.

1.

$$W = \int_I F_x dx + F_y dy \quad (1)$$

$$= \int_{AO} F_x dx + F_y dy + \int_{OB} F_x dx + F_y dy \quad (2)$$

$$= \int_R^0 F_x dx + \int_0^R F_y dy \quad (3)$$

$$= \int_R^0 0 dx + \int_0^R by^2 dy \quad (4)$$

$$= \frac{R^3}{3}b \quad (5)$$

x 軸上では $dy = 0$, y 軸上では $dx = 0$ を用いた. また, x 軸上では $y = 0$ より, $F_x = axy = 0$ である.

2. y を x を用いて表すと, $y = R - x$ となる. これより, $dy = -dx$. これより, 仕事は以下のように計算できる.

$$W = \int_I F_x dx + F_y dy \quad (6)$$

$$= \int_0^R (a(R - y)y \cdot (-1) + by^2) dy \quad (7)$$

$$= \int_0^R (-aRy + (a + b)y^2) dy \quad (8)$$

$$= -aR \frac{R^2}{2} + (a + b) \frac{R^3}{3} \quad (9)$$

$$= \frac{R^3}{6} (-a + 2b) \quad (10)$$

なお, パラメータ変数を用いるのであれば $x = t, y = R - t$ において, $dx = dt, dy = -dt$ として計算する.

3. 極座標で表現すると,

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta \quad (11)$$

と書ける. これより, x, y の微分は

$$dx = -R \sin \theta d\theta, \quad dy = R \cos \theta d\theta \quad (12)$$

となる. これより, 仕事は以下のように計算できる.

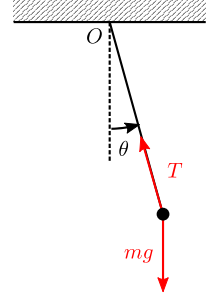
$$W = \int_{III} F_x dx + F_y dy \quad (13)$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-aR^2 \cos \theta \sin \theta \cdot R \sin \theta + bR^2 \sin^2 \theta \cdot R \cos \theta) d\theta \quad (14)$$

$$= R^3(-a + b) \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \quad (15)$$

$$= \frac{R^3}{3} (-a + b) \quad (16)$$

問 2. 図に示すような振り子を考える．ひもの長さは L で，質量は無視できるものとする．ひもと鉛直方向がなす角度を θ とおく．また，質点の質量を m ，重力加速度を g ，ひもの張力を T とする．時刻 $t = 0$ において， $\theta = 0, \dot{\theta} = \omega_0$ とする．



1. ひもの固定端を原点 O とする極座標を考え，半径方向の運動方程式を書け．
2. 張力 T を $m, L, g, \theta, \dot{\theta}$ を用いて表せ．
3. $\theta = 0$ のとき，位置エネルギー $U = 0$ とする．角速度 $\dot{\theta}$ で運動しているときの力学的エネルギーを求めよ．
4. 力学的エネルギー保存の法則より，張力 T を $m, L, g, \theta, \omega_0$ で表せ．
5. 張力 T が最大となるときの， θ の値を求めよ．

解答

1. 半径方向の運動方程式は，

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (17)$$

$F_r = -T + mg \cos \theta$ ， $r = L$ （一定）より，

$$-T + mg \cos \theta = -mL\dot{\theta}^2 \quad (18)$$

- 2.

$$T = mL\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \quad (19)$$

3. 速度 v と角速度 $\dot{\theta}$ の関係， $v = L\dot{\theta}$ を用いると，運動エネルギーは次式で表される．

$$K = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 \quad (20)$$

位置エネルギーは以下の通りである．

$$U = mgL(1 - \cos \theta) \quad (21)$$

よって，力学的エネルギーは

$$K + U = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos \theta) \quad (22)$$

となる．

- 4.

力学的エネルギー保存の法則より，次式が成立する．

$$\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mL^2\omega_0^2 \quad (23)$$

式 (19) から，式 (23) を用いて $\dot{\theta}$ を消去すると，次式を得る．

$$T = mL\omega_0^2 + mg(-2 + 3 \cos \theta) \quad (24)$$

5. 式 (24) より，張力 T が最大となるのは， $\cos \theta = 1$ のときである．このとき， $\theta = 0$ である．