一般力学（T1T2） 2013/07/29　期末試験

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

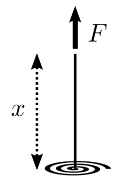
各小問の最後に書かれた括弧内の変数の <u>一部あるいはすべて</u> を用いて答えよ．配点は小問 1 つにつきおよそ 5 点である．

極座標の運動方程式　$F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right), \quad F_\theta = m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)$

回転座標系における運動方程式　$m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2 x', \qquad m\ddot{y}' = F_{y'} - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2 y'$

Lagrange の運動方程式　$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad (L = K - U)$

問 1.　線密度 λ で一様な長いひもがまとめて床の上に置かれている．このひもの一端を持ち上げる．ひもは伸びず，また絡まることなく持ち上がるものとする．重力加速度を g として以下の問に答えよ．[*1]



1. ひもを一定の速度 $\bar{v}$ で上昇させる運動を考える．
   (a) 右図のように時刻 t において，長さ x のひもが床から離れ持ち上げられている．このとき，このひもの運動量を求めよ．$(\lambda, x, \bar{v})$
   (b) 時刻 $t + \Delta t$ において，持ち上げられているひもの長さを表せ．$(x, \bar{v}, \Delta t)$
   (c) 時刻 $t + \Delta t$ における運動量を書け．$(\lambda, x, \bar{v}, \Delta t)$
   (d) ひもを持ち上げる力 $F(t)$ を表せ．$(\lambda, x, \bar{v}, g)$
2. 一定の力 $\bar{F}$ でひもを上昇させる運動を考える
   (a) 時刻 t において，持ち上げられているひもの長さを x，ひもの速度を v とする．また，時刻 $t + \Delta t$ において，持ち上げられているひもの長さを $x + \Delta x$，ひもの速度を $v + \Delta v$ とする．時刻 $t + \Delta t$ における運動量を求めよ．$(\lambda, x, v, \Delta x, \Delta v)$
   (b) 力 $\bar{F}$ を x を用いて表せ．(λ, x, g)

解答

1.(a)

$$P(t) = \underline{\lambda x \bar{v}} \tag{1}$$

1.(b)

$$\underline{x + \bar{v}\Delta t} \tag{2}$$

1.(c)

$$P(t + \Delta t) = \underline{\lambda\left(x + \bar{v}\Delta t\right)\bar{v}} \tag{3}$$

1.(d)　*Deltat* が微小であれば，時刻 t から $t + \Delta t$ の間に作用する力を $F(t)$ で一定とみなすことができる．すなわち，

$$P(t + \Delta t) - P(t) = \int_t^{t+\Delta t} \left(F - \lambda x g\right) \mathrm{d}t \sim \left(F(t) - \lambda x g\right)\Delta t \tag{4}$$

となる．これより，次式を得る．

$$F(t) = \underline{\lambda \bar{v}^2 + \lambda x g} \tag{5}$$

2.(a)

$$P(t + \Delta t) = \underline{\lambda\left(x + \Delta x\right)\left(v + \Delta v\right)} \tag{6}$$

2.(b)　$P(t) = \lambda x v$ より，

$$\lambda\left(x\Delta v + v\Delta x\right) \sim \left(\bar{F} - \lambda x g\right)\Delta t \tag{7}$$

これより，

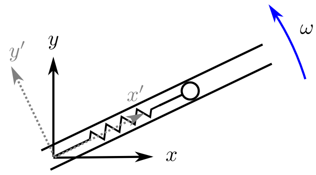
$$\bar{F} \sim \lambda\left(x\frac{\Delta v}{\Delta t} + v\frac{\Delta x}{\Delta t} + xg\right) \tag{8}$$

となる．$\Delta t \to 0$ とすると，次式を得る．

$$\bar{F} = \underline{\lambda\left(x\ddot{x} + \dot{x}^2 + xg\right)} \tag{9}$$

[*1] g を考慮して問題を作成しなおした．出題時には g について言及していないので，当然，g のついている項はなくても正解とする．

問 2.　筒の中にバネ定数 k のバネと質量 m の質点（小さな球）がある．バネの一端を原点に固定し，もう一方の端に質点をつける．右図のように，この筒を原点を中心に **水平面内で**（重力は考えない）一定の角速度 ω で回転させる．筒と質点には摩擦は作用しないと仮定する．また，時刻 $t=0$ のとき，筒は x 軸上にあるとする．このとき，以下の問に答えよ．



1. 原点から質点までの距離を r とおく．距離が $r=r_0$ のとき，バネは自然長となる．バネが質点を**引っ張る力** F を書け．(k, r, r_0)
2. 筒が質点に対して作用する抗力を S とおく．直交座標系 (x, y) における運動方程式を x 方向と y 方向について書け．$(m, x, y, F, S, \omega, t)$
3. 極座標における運動方程式を半径方向と周方向について書け．(m, r, F, S, ω, t)
4. 角速度 ω で回転している回転座標系 (x', y') における運動方程式を x' 方向と y' 方向について書け．ただし，時刻 $t=0$ において (x, y) 座標系と (x', y') 座標系は一致している．(m, x', F, S, ω, t)
5. 「ラグランジュの運動方程式」を用いて半径方向（r 方向）の運動方程式を導出せよ．(m, r, F, S, ω, t)
6. $k > m\omega^2$ とする．時刻 $t=0$ で $r=r_0$, $\dot{r}=0$ のとき，時刻 t における距離 r を求めよ．(k, m, ω, r_0, t)

解答

1.

$$\underline{F = k(r - r_0)} \tag{10}$$

2.

$$\underline{m\ddot{x} = -F\cos\omega t - S\sin\omega t} \tag{11}$$
$$\underline{m\ddot{y} = -F\sin\omega t + S\cos\omega t} \tag{12}$$

3.

$$\underline{-F = m\left(\ddot{r} - r\omega^2\right)} \tag{13}$$
$$\underline{S = 2m\dot{r}\omega} \tag{14}$$

4.　使って良い変数に y' は含まれてない．$y'=0$ より y' は使わないで欲しいというのが出題者の意図．

$$\underline{m\ddot{x}' = -F + m\omega^2 x'} \tag{15}$$
$$\underline{0 = S - 2m\omega\dot{x}'} \tag{16}$$

5.　ポテンシャルエネルギーは

$$U = \frac{1}{2}k\left(r - r_0\right)^2 \tag{17}$$

である．一方，運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right) \tag{18}$$

である．

これをラグランジュの運動方程式に代入すると，

$$m\ddot{r} - m\omega^2 r + k\left(r - r_0\right) = 0 \tag{19}$$

を得る．これより，次式を得る．

$$\underline{m\ddot{r} - m\omega^2 r + F = 0} \tag{20}$$

少し分かりにくかったかもしれない．式 (19) を導出させる問題にすべきだった．

6.　式 (19) より，

$$\ddot{r} + \frac{k - m\omega^2}{m}\left(r - \frac{kr_0}{k - m\omega^2}\right) = 0 \tag{21}$$

ここで，$q = r - \dfrac{kr_0}{k - m\omega^2}$ とおくと，式は，

$$\ddot{q} + \frac{k - m\omega^2}{m} q = 0 \tag{22}$$

となる．これより一般解として次式を得る．

$$q = A\cos\left(\sqrt{\frac{k - m\omega^2}{m}}t + \delta\right) \tag{23}$$

r と q の関係より，

$$r = \frac{kr_0}{k - m\omega^2} + A\cos\left(\sqrt{\frac{k - m\omega^2}{m}}t + \delta\right) \tag{24}$$

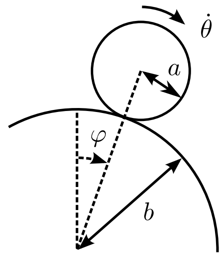
となる[*2]．初期条件より，A および δ が定まる．よって，

$$r = \frac{r_0}{k - m\omega^2}\left[k - m\omega^2\left(\cos\sqrt{\frac{k - m\omega^2}{m}}\,t\right)\right] \tag{25}$$

これくらいの微分方程式は計算の指針くらいは立てれるようにして欲しい．

[*2] 式 (21) を「斉次方程式の解」+「特解」として解いてもよい．

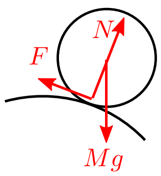
問 3. 右図のように固定された半径 b の円柱 B の上を質量 M，半径 a，密度一様な円柱 A が平面運動する．2 つの円柱の中心を結ぶ直線と鉛直方向のなす角を φ，運動する円柱 A の回転角を θ とする．（時計まわりを正とする．）重力加速度 g は鉛直下向きに作用している．以下の問に答えよ．



1. 円柱 A に作用する抗力 N，摩擦力 F，重力 Mg を図示せよ．（力のベクトルを矢印で描け．ただし，大きさが正となるように矢印を描くこと．）
2. 円柱 B の（円の）中心を原点とする極座標を用いて，円柱 A の重心における運動方程式を半径方向と円周方向について書け．$(M, g, N, F, a, b, \varphi)$
3. 円柱 A の回転の方程式を書け．(M, g, N, F, a, θ)
4. 円柱 A が円柱 B 上を **滑らず転がるとき**，2 つの角速度 $\dot{\varphi}$ および $\dot{\theta}$ の関係を長さ a, b を用いて表せ．(a, b, φ, θ)
5. 運動エネルギーを書け．$(M, a, b, \varphi, \theta)$
6. 円柱 A が $\varphi = 0$ で静止した状態からゆっくりと右側に転がり始めた．円柱 A が円柱 B 上を **滑らず転がるとき**，角速度 $\dot{\varphi}$ を角度 φ を用いて表せ．(M, g, a, b, φ).

解答

1.



2.

$$\underline{-M(a+b)\dot{\varphi}^2 = N - Mg\cos\varphi} \tag{26}$$

$$\underline{M(a+b)\ddot{\varphi} = -F + Mg\sin\varphi} \tag{27}$$

3. 円柱の慣性モーメントは $I = \dfrac{Ma^2}{2}$ である．

$$\underline{\frac{Ma^2}{2}\ddot{\theta} = Fa} \tag{28}$$

4. 出来が良くなかった．詳しい解説は後日更新予定．

$$\underline{(a+b)\dot{\varphi} = a\dot{\theta}} \tag{29}$$

5.

$$\underline{K = \frac{M}{2}(a+b)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{Ma^2}{4}\dot{\theta}^2} \tag{30}$$

6. $\varphi = 0$ で位置エネルギーを 0 とおく（$U = 0$），位置エネルギーは次式で与えられる．

$$U = -Mg(a+b)(1-\cos\varphi) \tag{31}$$

重力以外の力は仕事をしないので，力学的エネルギーは保存する．すなわち，

$$\frac{M}{2}(a+b)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{Ma^2}{4}\dot{\theta}^2 - Mg(a+b)(1-\cos\varphi) = 0 \tag{32}$$

式 (29) を代入すると

$$3(a+b)\dot{\varphi}^2 = 4g(1-\cos\varphi) \tag{33}$$

これより次式を得る．

$$\underline{\dot{\varphi} = 2\sqrt{\frac{g(1-\cos\varphi)}{3(a+b)}}} \tag{34}$$

これから N を求めさせて，「円柱 A が円柱 B から離れる ($N = 0$) となる φ を求めよ」，という問題がこの手の問題のよくあるパターン．

問 4.　右図のように質量 M，長さ L，密度一様な棒の両端にバネ定数 k，長さの等しいバネをつけ，**滑らかで水平**な机の上に置く（重力は考慮しない）．バネの一端は机上にある壁に固定されている．棒の左端，右端の y 座標をそれぞれ y_1, y_2 とする．また**図 2** に示すように，棒の重心の y 座標を y_c，棒の回転角を θ とする．（反時計まわりを正とする）バネが伸びていない時，バネは壁面に対して平行であり，$y_1 = y_2 = 0$ とする．また，全体の運動は微小であるとし，x 方向の運動は無視できるものとする．以下の問に答えよ．

1. 重心の位置 y_c および回転角 θ を表せ．(y_1, y_2, L)
2. 静止している棒に対して，**図 1** のように棒に対して垂直方向に，重心から左に h だけ離れた位置に撃力 $\bar{F}$ を与える．撃力を与えた直後におけるの重心の y 方向速度 v_0 を求めよ．$(\bar{F}, M, L, h, k)$
3. 撃力を与えた直後の棒の角速度 ω_0 を求めよ．$(\bar{F}, M, L, h, k)$
4. 撃力が作用した後，棒はバネの復元力を受け運動する．重心における y_c 方向の運動方程式を書け．(M, k, y_c)
5. 棒の回転の方程式を書け．(M, k, θ)
6. y_c および θ は単振動する．それぞれ角振動数を書け．(M, L, k)

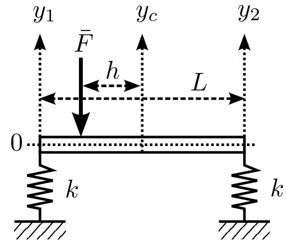


図 1：バネが自然長のとき

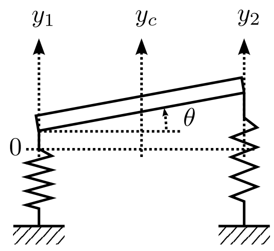


図 2：バネが伸びたとき

解答

1.

$$y_c = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{35}$$

$$\theta \sim \frac{y_2 - y_1}{L} \tag{36}$$

2.　解けた人は少ない．

撃力が加えられる前の運動量は 0，撃力が加えられた後の運動量は Mv_0 である．よって，

$$Mv_0 - 0 = \bar{F} \tag{37}$$

が成り立つ．これより，次式が言える．

$$\underline{v_0 = \frac{\bar{F}}{M}} \tag{38}$$

3.　解けた人は少ない．

撃力が加えられる前の角運動量は 0，撃力が加えられた後の角運動量は $\dfrac{ML^2}{12}\omega_0$ である[*3]．

$$\frac{ML^2}{12}\omega_0 - 0 = \bar{F}h \tag{39}$$

が成立する．これより次式を得る．

$$\underline{\omega_0 = \frac{12\bar{F}h}{ML^2}} \tag{40}$$

4.　棒に作用する力は $-ky_1 - ky_2 (= -2ky_c)$ である．よって次式を得る．

$$\underline{M\ddot{y}_c = -2ky_c} \tag{41}$$

5.　棒に作用する力のモーメントは $ky_1L/2 - ky_2L/2 (= -kL^2\theta/2)$ である．これより，回転の方程式は

$$\frac{ML^2}{12}\ddot{\theta} = -\frac{kL^2\theta}{2} \tag{42}$$

となる．まとめると次式を得る．

$$\underline{\ddot{\theta} = -\frac{6k}{M}\theta} \tag{43}$$

6.　式 (41) より，重心の y 方向の位置 y_c は角振動数 $\underline{\sqrt{2k/M}}$ で単振動する．また，式 (43) より，傾き θ は角振動数 $\underline{\sqrt{6k/M}}$ で単振動する．

[*3] 棒の慣性モーメントは $I = \dfrac{ML^2}{12}$ である．