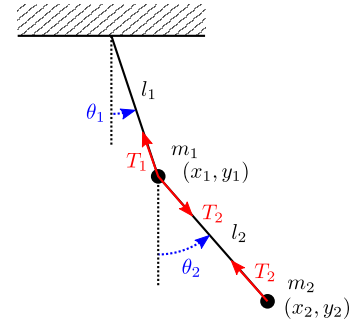


氏名

学籍番号

問 1. 右図のような 2 重振り子を考える. 上にある質点を質点 1, 下にある質点を質点 2 と呼ぶ. 重力加速度を g とする. 以下の問に答えよ.

1. 右図に示すように張力 T_1, T_2 が作用している. 質点 1, 質点 2 における y 方向の運動方程式を書け.
2. 質点 1, 質点 2 における x 方向の運動方程式を書け.
3. $\theta_1, \theta_2 \ll 1$ とするとき, $\cos \theta \sim 1$ となる. これを用いて, T_1, T_2 を m_1, m_2, g を用いて表せ.
4. $\theta_1, \theta_2 \ll 1$ とするとき, $\sin \theta \sim \theta$ となる. 運動方程式を $\theta_1, \theta_2, m_1, m_2, l_1, l_2, g$ を用いて表せ.
5. $l_1 = 2l, l_2 = 3l, m_1 = 2m, m_2 = m$ とする. $\theta_1 = A \cos(\omega t + \delta), \theta_2 = B \cos(\omega t + \delta)$ と仮定して, 解の規準振動数を求めよ.
6. それぞれの規準振動を図示せよ.
7. $\theta_1 = \theta_2 = \varepsilon, \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ で与えられているとき, θ_1 および θ_2 を求めよ.



解答

1.

$$m_1 \ddot{y}_1 = -T_1 \cos \theta_1 + T_2 \cos \theta_2 + m_1 g \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -T_2 \cos \theta_2 + m_2 g \quad (2)$$

4. $\sin \theta \sim \theta$ より,

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \sim l_1 \theta_1 \quad (9)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \sim l_1 \theta_1 + l_2 \theta_2 \quad (10)$$

2.

$$m_1 \ddot{x}_1 = -T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin \theta_2 \quad (3)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -T_2 \sin \theta_2 \quad (4)$$

式 (9), (10) を式 (3) に代入すると,

$$m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 = -T_1 \theta_1 + T_2 \theta_2 \quad (11)$$

となる. 式 (7), (8) より, 以下の運動方程式を得る.

$$m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 = -(m_1 + m_2) g \theta_1 + m_2 g \theta_2 \quad (12)$$

3. $y_1 = l_1 \cos \theta_1, y_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2$ である. $\cos \theta \sim 1$ を用いるとこれらの 2 階微分は 0 になる. つまり, 式 (1), (2) より,

$$0 = -T_1 + T_2 + m_1 g \quad (5)$$

$$0 = -T_2 + m_2 g \quad (6)$$

同様に式 (9), (10) を式 (4) に代入すると, 式 (8) を用いて次式を得る.

$$m_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2) = -T_2 \theta_2 = -m_2 g \theta_2 \quad (13)$$

m_2 で割ると,

$$l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 = -g \theta_2 \quad (14)$$

となる. これより, 次式を得る.

$$T_2 = m_2 g \quad (7)$$

$$T_1 = T_2 + m_1 g = (m_1 + m_2) g \quad (8)$$

を得る.

5 式 (12) を $m_1 l_1$ で割ると、次式を得る.

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 l_1} g \theta_1 - \frac{m_2}{m_1 l_1} g \theta_2 = 0 \quad (15)$$

また、式 (14) と式 (15) より、次式を得る.

$$\ddot{\theta}_2 - \frac{m_1 + m_2}{m_1 l_2} g \theta_1 + \frac{m_1 + m_2}{m_1 l_2} g \theta_2 = 0 \quad (16)$$

式 (15), (16) に $l_1 = 2l, l_2 = 3l, m_1 = 2m, m_2 = m$ を代入し、行列を用いて表すと、

$$l \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + g \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

を得る.

この式に $\theta_1 = A \cos(\omega t + \delta), \theta_2 = B \cos(\omega t + \delta)$ を代入し、 $\lambda = \frac{l}{g} \omega^2$ とおくと

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} - \lambda & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

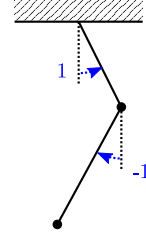
を得る.

A, B が非自明な解を持つためには式 (18) の左辺にある行列の行列式が 0 となればよい. すなわち、

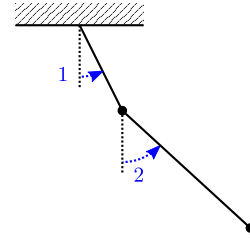
$$\left(\frac{3}{4} - \lambda\right) \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{8} = 0 \quad (19)$$

となればよい. この 2 次方程式の解は、 $\lambda = 1, \frac{1}{4}$ である. $\lambda = \frac{l}{g} \omega^2$ より、規準振動数は $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l}}$ となる.

6. $\lambda = 1$ のとき、 $B = -A$ となる. 図示すると下記のようなになる. 角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ で振動する.



また、 $\lambda = \frac{1}{4}$ のとき、 $B = 2A$ となる. このときは角振動数 $\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l}}$ で振動する.



7. 未知数が $A_1, A_2, \delta_1, \delta_2$ の 4 つである. 初期条件も 4 つあるので、初期条件を用いれば解ける.

小問 5 および 6 から、一般解は

$$\theta_1 = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \delta_1\right) + A_2 \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} t + \delta_2\right) \quad (20)$$

$$\theta_2 = -A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \delta_1\right) + 2A_2 \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} t + \delta_2\right) \quad (21)$$

と書ける. この式を $\theta_1 = \theta_2 = \varepsilon$ および $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ に代入すると、 $A_1 = \frac{1}{3}\varepsilon, A_2 = \frac{2}{3}\varepsilon, \delta_1 = \delta_2 = 0$ を得る. よって、

$$\theta_1 = \frac{\varepsilon}{3} \left[\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + 2 \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} t\right) \right] \quad (22)$$

$$\theta_2 = \frac{\varepsilon}{3} \left[-\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + 4 \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} t\right) \right] \quad (23)$$

となる.