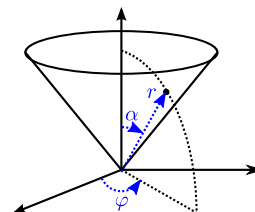


氏名

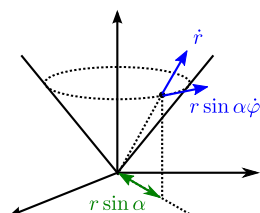
学籍番号

問 1. 中空の円錐内にある質点の運動を考える。右図のように、頂点を原点とし、軸は鉛直である。このとき、ラグランジュの運動方程式を用いて、運動方程式を求めよ。(一般化座標を r, φ として計算せよ。) 重力加速度は g とする。



解答

1. 円錐の母線に沿う方向の速度は $\dot{r}$ である。母線に直交し、かつ円錐に接する方向の速度（質点を含み水平な平面で、円錐を輪切りにしたときにできる円の円周上の速度）は、 $r \sin \alpha \dot{\varphi}$ である。



これより、

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2) \quad (1)$$

となる^{*1}。位置エネルギーは原点を規準として、

$$U = mgr \cos \alpha \quad (2)$$

である。これをラグランジュの運動方程式に代入する。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (3)$$

$q_i = r$ として、次式を得る。

$$m\ddot{r} = mr \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 - mg \cos \alpha \quad (4)$$

$q_i = \varphi$ として、次式を得る。

$$\frac{d}{dt} (mr^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}) = 0 \quad (5)$$

^{*1} 円錐の側面に直交する方向の速度は 0 である。速度 (v) の自乗 (v^2) は 3 つの直交する方向の速度成分の平方和で表されるので、 $v^2 = \dot{r}^2 + (r \sin \alpha \dot{\varphi})^2 + 0^2$ となる。