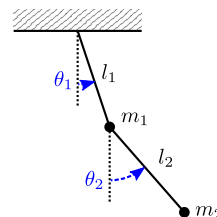


氏名

学籍番号

問 1. 右図のような 2 重振り子を考える．重力加速度を g とする．以下の問に答えよ．

1. この系の運動エネルギーを求めよ．ただし, $\theta_1, \theta_2 \ll 1$ である．
2. 2 つの質点の位置エネルギーを求めよ．
3. 「ラグランジュの運動方程式」から運動方程式を 2 本導出せよ．



解答

1. 固定点を原点とし, y 方向を鉛直上向きにとる．

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad (1)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (2)$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1 \quad (3)$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \quad (4)$$

微分すると,

$$\dot{x}_1 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \quad (5)$$

$$\dot{x}_2 = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \quad (6)$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \quad (7)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \quad (8)$$

を得る．これらを下記の式に代入すれば運動エネルギーを得る．

$$K = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (9)$$

θ が十分小さいので, $\cos \theta \sim 1$ および $\sin \theta \sim \theta$ と近似する．2 次以上の微小量を無視すると,

$$K \sim \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2)^2 \quad (10)$$

となる^{*1}．

補足

上述の説明は少し丁寧にしている．回答では, 「2 次の微小量を無視すると, 質点の鉛直方向の速度成分は無視できる．よって, ...」と書いて式 (10) を書く程度で十分である．

2. 2 本のひもが鉛直になるときの位置エネルギーを 0 とする．($U_1 = 0, U_2 = 0$)

$$U_1 = m_1 g l_1 (1 - \cos \theta_1) \quad (11)$$

$$U_2 = m_2 g l_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g l_2 (1 - \cos \theta_2) \quad (12)$$

となる．ここで, $\cos \theta \sim 1 - \frac{1}{2} \theta^2$ を用いると,^{*2}

$$U_1 \sim \frac{1}{2} m_1 g l_1 \theta_1^2 \quad (13)$$

$$U_2 \sim \frac{1}{2} m_2 g l_1 \theta_1^2 + m_2 g l_2 \theta_2^2 \quad (14)$$

となる．これらを足しあわせて次式を得る．

$$U \sim \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g l_2 \theta_2^2 \quad (15)$$

3. $L = K - (U_1 + U_2)$ をラグランジュの運動方程式に代入する．

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (16)$$

となる．

$q_i = \theta_1$ のとき,

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \theta_1 = 0 \quad (17)$$

となる．まとめると,

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2) g \theta_1 = 0 \quad (18)$$

を得る．

$q_i = \theta_2$ のとき,

$$m_2 l_2 (l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2) + m_2 g l_2 \theta_2 = 0 \quad (19)$$

となる．これより,

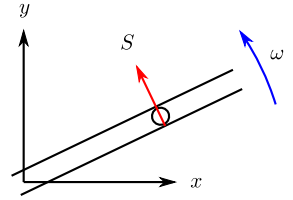
$$l_1 \ddot{\theta}_1 + l_2 \ddot{\theta}_2 + g \theta_2 = 0 \quad (20)$$

となる．

^{*1} $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$ ともに微小量と考える．

^{*2} $\cos \theta \sim 1$ とすると, 式 (11), (12) が 0 になるので注意．もっとも低次になる項 (ここでは θ^2) は残しておくこと．

問 2. 筒の中に質量 m の質点 (小さな球) がある．この筒を原点を中心に水平面内で一定の角速度 ω で回転させる．筒と質点には摩擦は作用しないと仮定する．また，筒が質点に与える力の大きさを S ，原点と質点の距離を r とおく．時刻 $t = 0$ において， $r = r_0 > 0, \dot{r} = 0$ となるとき，以下の問に答えよ．



1. 運動エネルギーを書け．
2. 「ラグランジュの運動方程式」を用いて運動方程式を導出せよ．

解答

1. 運動エネルギーは となる．これより，

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2) \quad (21)$$

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0 \quad (23)$$

である．

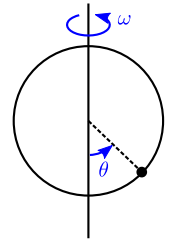
である．これを解くと，

2. 水平面内で運動しているため，位置エネルギーは $U = 0$ である．ラグランジュの運動方程式に $L = K$ を代入すると，

$$r = r_0 \cosh \omega t \quad (24)$$

$$m\ddot{r} - m\omega^2 r = 0 \quad (22) \quad \text{を得る．}$$

問 3. 右図のように半径 R の円輪が一定の角速度 ω で回転している．この円輪上を質量 m の質点が運動する．質点には鉛直下向きに重力が作用する．(重力加速度を g とする．) ただし，円輪と質点の間には摩擦は作用しないとする．以下の問に答えよ．



1. 質点の運動エネルギーを求めよ．
2. 質点の位置エネルギーを求めよ．
3. 「ラグランジュの運動方程式」を用いて運動方程式を導出せよ．

解答

1. 円輪を含む平面内において，質点は速度 $R\dot{\theta}$ で運動している．また，円輪を含む平面に対して直交する方向に速度 $R\omega \sin \theta$ で運動する．これより，

$$K = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) \quad (25)$$

となる．

3. ラグランジュの運動方程式に代入すると，

$$mR^2\ddot{\theta} - (mR^2\omega^2 \cos \theta \sin \theta - mgR \sin \theta) = 0 \quad (27)$$

となる．よって，

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta\right) \sin \theta = 0 \quad (28)$$

2. 質点が最も低い位置にあるときの位置エネルギーを 0 とすると次式を得る．

$$U = mgR(1 - \cos \theta) \quad (26)$$

となる．この式から分かるように， $\sin \theta = 0$ および $\cos \theta = \frac{g}{R\omega^2}$ のときに釣り合い状態 ($\ddot{\theta} = 0$) となる．ただし，後者の場合 $\cos \theta = \frac{g}{R\omega^2} \leq 1$ を満足する必要がある．