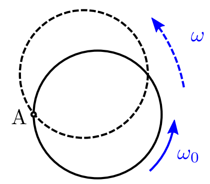
一般力学（T1T2） 2013/06/17　11 回目レポート　　　　返却を希望する場合は丸で囲む ⇒　返却希望

氏名　　　　　　　　　　　　　　　　　　　学籍番号

問 1.　水平な机の上で「半径 a，質量 M，密度一様の円盤」が角速度 ω_0 で回転している．ただし，円盤の重心（質量中心）は動いていない．円盤と机の間には摩擦は作用しないと仮定するとき，以下の問に答えよ．



1. 円盤の重心から距離 b 離れた点を原点とするとき，角運動量 L を求めよ．
2. 円周上の点 A を瞬間的に固定すると，円盤は点 A を中心に回転を始める．このとき，点 A まわりの角速度 ω を求めよ．

解答

1.　運動量は「質量中心の角運動量」と「質量中心のまわりの角運動量」に分けられる．

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_c \times M\dot{\boldsymbol{r}}_c + \sum \boldsymbol{r}_i{}' \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i{}' \tag{1}$$

質量中心は動かないので，$\dot{\boldsymbol{r}}_c = 0$ である．これより，式 (1) 右辺第 1 項は消え，角運動量は「質量中心のまわりの角運動量」と等しくなる．よって，角運動量は

$$L = \underline{\frac{1}{2}Ma^2\omega_0} \tag{2}$$

となる．これより，どの点においても角運動量は一定となることが分かる．

2.　点 A を中心に考える．固定する前の点 A まわりの角運動量は，前の問題より $\frac{1}{2}Ma^2\omega_0$ である．固定したとき，点 A に力が作用するが，点 A まわりの力のモーメントは 0 である（点 A が力の作用点であるため，点 A と作用点の距離は 0 である）．そのため，点 A を固定するとき，力のモーメントは生じず，その結果運動量は保存される．点 A まわりの慣性モーメントを I_A とすると，固定する前後の角運動量は保存されるので，

$$I_A\omega = \frac{1}{2}Ma^2\omega_0 \tag{3}$$

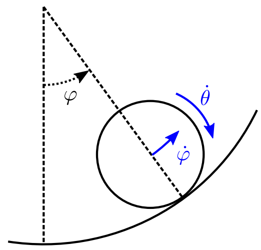
となる．点 A まわりの慣性モーメントは平行軸の定理より，

$$I_A = I_c + Ma^2 = \frac{3}{2}Ma^2 \tag{4}$$

である．よって，

$$\omega = \frac{\frac{1}{2}Ma^2\omega_0}{\frac{3}{2}Ma^2} = \underline{\frac{1}{3}\omega_0} \tag{5}$$

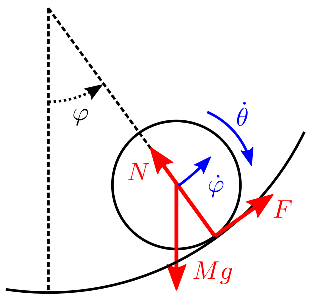
問 2.　「半径 b の完全に固定された円筒」の中に「半径 a，質量 M で密度が一様な円柱」を置く．円柱が平面運動するとき，以下の問に答えよ．



1. 円柱は右側に進んでいる．図に摩擦力 F，拘束力 N，重力 Mg を描き込め．（g は重力加速度である．）
2. 円筒の中心を原点とする極座標系を考え，運動方程式を書け．なお，円筒の中心と円柱の中心を結ぶ直線と鉛直方向のなす角を φ，円柱の角速度を $\dot{\theta}$ とする．ただし，角度 φ は 半時計回り を正とし，角度 θ は 時計回り を正とする．
3. 円柱の回転の方程式を書け．
4. $\dot{\varphi}$ と $\dot{\theta}$ の関係を長さ a，b を用いて表せ．
5. $\varphi \ll 1$ のとき，円柱は微小振動する．角振動数を求めよ．

解答

1.　赤い矢印が力のベクトルを表している[*1]．



2.　半径方向の座標を r とおくと，極座標系における運動方程式は以下のようになる．

$$M\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = -N + Mg\cos\varphi \tag{6}$$
$$M\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) = F - Mg\sin\varphi \tag{7}$$

半径方向には常に $r = b - a$ で一定であるので，

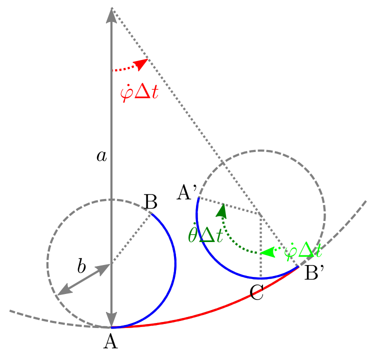
$$\underline{-M\left(b-a\right)\dot{\varphi}^2 = -N + Mg\cos\varphi} \tag{8}$$
$$\underline{M\left(b-a\right)\ddot{\varphi} = F - Mg\sin\varphi} \tag{9}$$

となる．

3.　円柱の回転の方程式は，以下の通りである．

$$\underline{\frac{1}{2}Ma^2\ddot{\theta} = -aF} \tag{10}$$

4.　導出方法その１（変位の関係を用いる．）



Δt の間に円柱と接する円筒の円周上の距離は $a\dot{\varphi}\Delta t$（赤線）である．一方，円柱が円筒と接する距離は $b\left(\dot{\theta} + \dot{\varphi}\right)\Delta t$（青線）である[*2]．この両者が等しいので，

$$a\dot{\varphi}\Delta t = b\left(\dot{\theta} + \dot{\varphi}\right)\Delta t \tag{11}$$

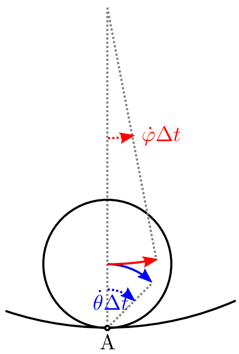
となる．まとめると，次式を得る．

$$\underline{(b-a)\dot{\varphi} = a\dot{\theta}} \tag{12}$$

[*1] 力 F の向きがわからないときは，適当に向きを決めればよい．向きを決めてから，F を計算し，$F > 0$ となれば向きは正しかったことになり，$F < 0$ となれば逆向きが正しいことが分かる．

[*2] 点 A から点 B までが円筒と接する．右側の円において点 C は点 A があったところである．弧 CA' の距離が $b\dot{\theta}\Delta t$，弧 B'C の距離が $b\dot{\varphi}\Delta t$ である．青線の長さは，弧 B'A' であるので，これらの和で表される．

導出方法その 2（速度の関係を用いる.）



ある瞬間だけに着目すると，円柱は接地点 A を中心に回転運動している.（円柱における接地点 A は速度 0 であり，点 A 以外の領域は速度を持って運動している.）この瞬間的に回転の中心になっている点を，「瞬時回転中心」という．点 A から円柱の重心を見ると，速度 $b\dot{\theta}$ で運動している（青の実戦の矢印).（重心からみると点 A が速度 $b\dot{\theta}$ で運動している.）一方，円筒の中心からみるとこの円筒は速度 $(b-a)\dot{\varphi}$ で運動している（赤の実戦の矢印).この 2 つの速度が等しいので，

$$\underline{(b-a)\dot{\varphi} = a\dot{\theta}} \tag{13}$$

となる.

未知数が φ, θ, F, N で 4 つ．方程式は (8)–(9) の 4 本である．抗力 N を計算する必要がなければ，φ, θ, F の 3 つの未知数に対して，3 本の方程式 (10), (9), (12) を使えば良い.

5．式 (10)，(12) より

$$F = -\frac{\frac{Ma^2}{2}}{a}\ddot{\theta} = -\frac{\frac{Ma^2}{2}}{a}\frac{b-a}{a}\ddot{\varphi} = -\frac{M}{2}(b-a)\ddot{\varphi} \tag{14}$$

を得る．式 (8) に代入すると，

$$M(b-a)\ddot{\varphi} = -\frac{M}{2}(b-a)\ddot{\varphi} - Mg\sin\varphi \tag{15}$$

を得る．まとめると，

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{3}\frac{g}{b-a}\sin\varphi = 0 \tag{16}$$

となる．$\varphi \ll 1$ のとき，$\sin\varphi \sim \varphi$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{3}\frac{g}{b-a}\varphi = 0 \tag{17}$$

となる．よって，角振動数は，

$$\underline{\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{b-a}}} \tag{18}$$

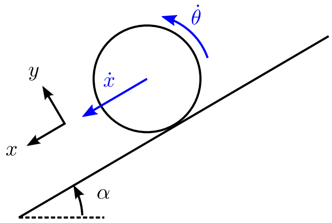
となる.

さて，式 (14) と式 (16) から，

$$\begin{aligned} F &= -\frac{M}{2}(b-a)\cdot\left(-\frac{2}{3}\frac{g}{b-a}\sin\varphi\right) && (19) \\ &= \frac{Mg}{3}\sin\varphi && (20) \end{aligned}$$

であるので，$\varphi > 0$ のとき，$F > 0$ となる．これより小問 1 で描いたベクトル $\boldsymbol{F}$ の向きは正しいことが分かる.

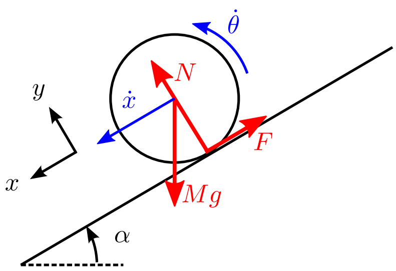
問 3.　角度 α の斜面の上を半径 a，質量 M，密度が一様な円柱が平面運動する．斜面と円柱の間には摩擦が作用する．以下の問に答えよ．



1. 円柱が転がり落ちているとき，図に力のベクトル（重力 Mg，摩擦力 F，拘束力 N）を描き込め．（g は重力加速度である．）
2. 斜面を下る方向に沿って x 軸，斜面に直交する方向に y 軸を取る．重心（質量中心）の速度を $\dot{x}$，円柱の回転速度を $\dot{\theta}$ とする．運動方程式および回転の方程式を書け．
3. 円柱が斜面の上を 滑らず転がる とき，重心の速度 $\dot{x}$ と円柱の回転速度 $\dot{\theta}$ の関係を書け．
4. 円柱が斜面の上を滑らず転がるとき，$\ddot{x}$ を求めよ．
5. 円柱が斜面の上を滑りながら転がるとき，$F = \mu' N$ となる．このとき，$\ddot{x}$ を求めよ．

解答

1. 赤色の矢印が力のベクトルである．



円柱が坂道を登っていくときは，摩擦力の向きは反対になる．

2.　円柱の慣性モーメントは $I = \dfrac{1}{2}Ma^2$．

$$\underline{M\ddot{x} = -F + Mg\sin\alpha} \tag{21}$$

$$\underline{0 = N - Mg\cos\alpha} \tag{22}$$

$$\underline{\frac{1}{2}Ma^2\ddot{\theta} = aF} \tag{23}$$

3.　授業で説明した通りである．

$$\underline{\dot{x} = a\dot{\theta}} \tag{24}$$

4.　式 (23), (24) から

$$F = \frac{\frac{Ma^2}{2}}{a}\frac{\ddot{x}}{a} = \frac{1}{2}M\ddot{x} \tag{25}$$

上の式を式 (21) に代入すると，

$$\frac{3}{2}M\ddot{x} = Mg\sin\alpha \tag{26}$$

となる．よって，

$$\underline{\ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\alpha} \tag{27}$$

を得る．

なお，この式を式 (25) に代入すると，

$$F = \frac{1}{3}Mg\sin\alpha \tag{28}$$

となる．この式と式 (22) より

$$\frac{F}{N} = \frac{1}{3}\tan\alpha \tag{29}$$

となる．滑らず転がるためには，μ を静止摩擦係数として，$F < \mu N$ を満たす必要がある．すなわち，円柱が滑らず転がるとき，以下の関係が成立する．

$$\frac{F}{N} = \frac{1}{3}\tan\alpha < \mu \tag{30}$$

なお，式 (27) はエネルギーからも計算できる．

拘束力 N および摩擦力 F は仕事をせず，重力 Mg だけが仕事をする．その重力は保存力であるので，力学的エネルギー保存の法則が成立する．拘束力 N および摩擦力 F は考えなくて良いので，未知変数は x と θ の 2 つのみであり，必要な方程式は 2 本である．2 本のうち 1 本は (24) であり，もう一本は以下で示す力学的エネルギーの式である．運動を始めた時の力学的エネルギーを 0 とすると次式が成り立つ．

$$\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mgx\sin\alpha = 0 \tag{31}$$

慣性モーメント $I = \dfrac{Ma^2}{2}$ および式 (24) より，次式が言える．

$$\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{Ma^2}{2}\left(\frac{\dot{\theta}}{a}\right)^2 - Mgx\sin\alpha = 0 \tag{32}$$

まとめると，次の式を得る．

$$\frac{3}{4}\dot{x}^2 - gx\sin\alpha = 0 \tag{33}$$

時間微分をすると，

$$\frac{3}{2}\ddot{x}\dot{x} - g\dot{x}\sin\alpha = 0 \tag{34}$$

となる．さらに，$\dot{x}$ で除すと式 (27) と同じ式を得る．

$$\ddot{x} - \frac{2}{3}g\sin\alpha = 0 \tag{35}$$

運動方程式からエネルギーの式（運動エネルギーや仕事の関係式）を導出するためには，運動方程式と速度ベクトルの（内）積を取り，時間積分をした．逆に，エネルギーの式から運動方程式を得るためには，時間微分をし，速度で割れば良い．

5. 未知変数は 4 つである．方程式は式 (21), (22), (23) の 3 本に，力と力の関係式

$$F = \mu' N \tag{36}$$

を加えると，4 本になる．

式 (21) と式 (22) に μ' を乗じた式の和を取ると，式 (36) より，F および N が消去される．

$$M\ddot{x} = Mg\left(\sin\alpha - \mu'\cos\alpha\right) \tag{37}$$

よって，

$$\ddot{x} = \underline{g\left(\sin\alpha - \mu'\cos\alpha\right)} \tag{38}$$

となる．

式 (21) より，

$$\begin{aligned} F &= -M\ddot{x} + Mg\sin\alpha \qquad (39)\\ &= Mg\mu'\cos\alpha \qquad (40)\end{aligned}$$

式 (23) より，

$$\ddot{\theta} = \frac{aF}{\frac{Ma^2}{2}} = \frac{aMg\mu'\cos\alpha}{\frac{Ma^2}{2}} = \frac{2g\mu'\cos\alpha}{a} \tag{41}$$

接地点における円柱と斜面の相対速度 u は, $u = \dot{x} - a\dot{\theta}$ である．時刻 $t = 0$ において，$\dot{x} = 0$, $\dot{\theta} = 0$ とすると，

$$\begin{aligned} u &= \dot{x} - a\dot{\theta} \qquad (42)\\ &= gt(\sin\alpha - 3\mu'\cos\alpha) \qquad (43)\end{aligned}$$

となる．

さて，滑りながら転がるときは，式 (30) を満足しないので，

$$\frac{F}{N} = \frac{1}{3}\tan\alpha > \mu\,(> \mu') \tag{44}$$

となる．これより，

$$\sin\alpha - \mu'\cos\alpha > \sin\alpha - 3\mu'\cos\alpha > 0 \tag{45}$$

が成立する．よって，式 (38) および式 (43) において，$\ddot{x}$，u ともに正となる．