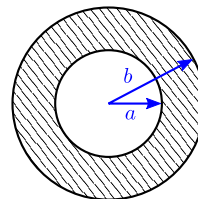


氏名

学籍番号

問 1. 外径 b , 内径 a の穴のあいた円板の慣性モーメントを質量 M および長さ a, b を用いて表せ. 回転軸は円の中心を通り, 円板に直交する. 密度はすべて一様とする.



解答

$$I = \frac{Mb^2}{2} - \frac{Ma^2}{2} \text{ としないように.}$$

1. 定義通りに計算すれば良い.

$$I = \int_S \rho r^2 dS \quad (1)$$

$$= \rho \int_a^b \int_0^{2\pi} r^3 dr d\theta \quad (2)$$

$$= \rho \frac{b^4 - a^4}{4} 2\pi = \rho \frac{b^4 - a^4}{2} \pi \quad (3)$$

$M = \rho\pi(b^2 - a^2)$ より,

$$\frac{I}{M} = \frac{b^4 - a^4}{2(b^2 - a^2)} \frac{b^2 + a^2}{2} \quad (4)$$

$$I = \frac{M(b^2 + a^2)}{2} \quad (5)$$

質量が同一であれば, この問題の慣性モーメントは自身が詰まった円板の慣性モーメント $Mb^2/2$ よりも大きくなる. また, $a \rightarrow b$ のとき, 式 (5) 円輪の慣性モーメント Mb^2 , $a \rightarrow 0$ のとき, 円板の慣性モーメント $Mb^2/2$ となる.

別解

半径 R の円板の慣性モーメント I_R を密度を用いて表すと, 以下のようになる.

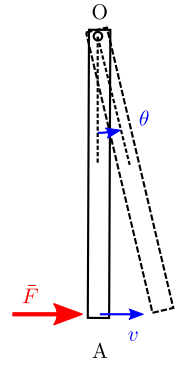
$$I_R = \frac{MR^2}{2} = \frac{\rho\pi R^4}{2} \quad (6)$$

$$I = I_b - I_a = \frac{\rho\pi(b^4 - a^4)}{2} \quad (7)$$

上式は, (3) と同じである.

問 2. 長さ l の棒の一端を点 O に固定し、もう一端 A に撃力 $\bar{F}$ を加えると、棒はその撃力のベクトルを含む平面内で運動を始めた。撃力は静止した棒に加えられたものとする以下の問に答えよ。

1. 撃力を加えた直後の点 A の速度 v を求めよ。点 O まわりの慣性モーメントを I とする。
2. 撃力を加えた直後の運動エネルギーを求めよ。
3. 撃力を加えた後、棒は単振動（微小振動）を始めた。棒と鉛直方向のなす角度 θ が最大となるとき、角度を求めよ。点 O から質量中心までの距離を l_c 、棒の質量を M とする。また、 $\cos \theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}$ とする。



解答

1. 時刻 t から $t + \Delta t$ の間に撃力が加えられたとする。

運動量の増加量は

$$L(t + \Delta t) - L(t) = \bar{F}l \quad (8)$$

2. 運動エネルギーは以下の通り。

$$K_0 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{\bar{F}l}{I}\right)^2 = \frac{\bar{F}^2 l^2}{2I} \quad (13)$$

点 O を中心とする点 A の角速度を ω とすると

$$L(t + \Delta t) = I\omega \quad (9)$$

$$L(t) = 0 \quad (10)$$

である。これより、

$$\omega = \frac{\bar{F}l}{I} \quad (11)$$

となる。よって、

$$v = l\omega = \frac{\bar{F}l^2}{I} \quad (12)$$

3. 静止時の位置エネルギーを 0 とおくと、位置エネルギーは

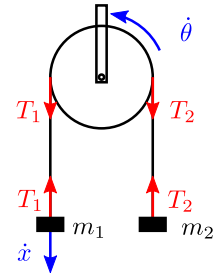
$$U = Ml_c g (1 - \cos \theta) \sim Ml_c g \frac{\theta^2}{2} \quad (14)$$

となる。角度 θ が最大になるとき、棒は静止しているので、 $K_0 = U$ である。このとき、

$$\theta = \frac{\bar{F}l}{\sqrt{Ml_c g}} \quad (15)$$

となる。

問 3. 滑車にひもをかけ，両端にそれぞれ質点 1 と質点 2 をつける．質点の質量はそれぞれ m_1, m_2 であり， $m_1 > m_2$ とする．滑車は，半径 a の円盤で，質量は M ，密度は一様とする．また，ひもは，質量を無視でき，伸縮しないものとする．ひもと滑車の間にすべりは生じないとする．以下の問に答えよ．



1. 滑車の慣性モーメントを求めよ．回転軸は円の中心である．
2. 質点 1，質点 2 を引っ張る張力をそれぞれ T_1, T_2 ，重力加速度を g とする．質点 1 が落下する速度を $\dot{x}$ とするとき，質点 1 および質点 2 の運動方程式を書け．
3. 滑車が回転する角速度を $\dot{\theta}$ とする．滑車の慣性モーメント I を用いて，滑車の回転の方程式を書け．
4. $\dot{x}$ と $\dot{\theta}$ の関係式を書け．
5. 質点 1 の加速度 $\ddot{x}$ を m_1, m_2, M, a, g を用いて表せ．

解答

未知数が x, θ, T_1, T_2 の 4 つであるので，独立な式を 4 つ見つける．「質点 1 の運動方程式」，「質点 2 の運動方程式」，「滑車の回転の方程式」に加えて「変位 x と角度 θ の関係式」で 4 つになる．

1. 円盤の慣性モーメント

$$I = \frac{1}{2}Ma^2 \quad (16)$$

2. 質点 1 の落下する距離と質点 2 の上昇する距離は等しい．

$$m_1\ddot{x} = m_1g - T_1 \quad (17)$$

$$m_2\ddot{x} = T_2 - m_2g \quad (18)$$

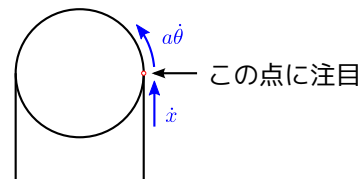
3. 左回りを正とする．

$$I\ddot{\theta} = (T_1 - T_2)a \quad (19)$$

4. 滑車右の点に着目する．滑車がひもを巻き取る速度は $a\dot{\theta}$ ，ひもが巻き取られる速度は $\dot{x}$ であり，両者は等しい．すなわち

$$\dot{x} = a\dot{\theta} \quad (20)$$

となる．



5. 式 (17)，(18) の和を取り，(19) を用いて T_1, T_2 を消去する．さらに，式 (16)，(20) を代入すると，次式を得る．

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}g \quad (21)$$