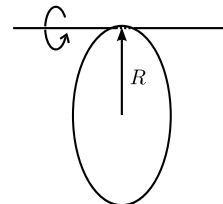


氏名

学籍番号

問 1. 以下の慣性モーメントを求めよ. 質量 M とし, 密度 (面密度) は一様とする. 円あるいは球の半径は R とする.

1. 球殻 (球の中心を通る直線を回転軸とする)
2. 球 (球の中心を通る直線を回転軸とする)
3. 中空の円筒 (円の中心を結ぶ直線を回転軸とする)
4. 円 (円周上の 1 点を通り, 円板に直交する直線を軸とする)



4. のイメージ図 (円を斜め前から見ている)

解答

1. 円の中心を原点とし, x 軸, y 軸, z 軸まわりの慣性モーメントを I_x, I_y, I_z とすると, 対称性より $I = I_x = I_y = I_z$ である.

$$I = \frac{I_x + I_y + I_z}{3} \quad (1)$$

$$= \frac{2\rho}{3} \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dS \quad (2)$$

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ である. また, $\int_S dS$ は球の表面積であり $4\pi R^2$ である. これより,

$$I = \frac{2\rho}{3} R^2 \cdot 4\pi R^2 \quad (3)$$

$$= \frac{8\pi\rho}{3} R^4 \quad (4)$$

となる. 質量 M で割る.

$$\frac{I}{M} = \frac{I}{\rho \cdot 4\pi R^2} = \frac{2}{3} R^2 \quad (5)$$

$$I = \frac{2}{3} MR^2 \quad (6)$$

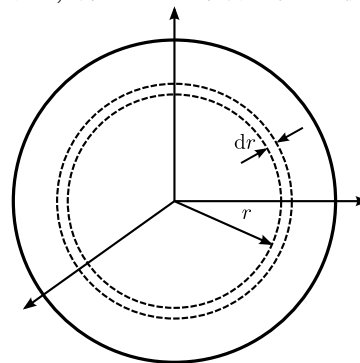
2. 1. と同様に, $I = I_x = I_y = I_z$ を用いる.

$$I = \frac{I_x + I_y + I_z}{3} \quad (7)$$

$$= \frac{2\rho}{3} \int_V (x^2 + y^2 + z^2) dV \quad (8)$$

$$= \frac{2\rho}{3} \int_V r^2 dV \quad (9)$$

半径 r , 厚さ dr の球殻を集めて積分する.



この球殻の面積は,

$$dV = 4\pi r^2 dr \quad (10)$$

である.

$$I = \frac{8\pi\rho}{3} \int_0^R r^4 dr = \frac{8\pi\rho}{15} R^5 \quad (11)$$

質量 M で割る.

$$\frac{I}{M} = \frac{I}{\frac{4}{3}\pi\rho R^3} = \frac{2}{5} R^2 \quad (12)$$

よって,

$$I = \frac{2}{5} MR^2 \quad (13)$$

となる*1.

*1 球の慣性モーメントは問題によく出てきます. 球の慣性モーメント $\frac{2}{5} MR^2$ は覚えておきましょう. 円の慣性モーメント $\frac{1}{2} MR^2$ も覚えておきましょう.

別解

$I = I_x = I_y = I_z$ を用いずにそのまま計算することも可能である.

$$I = \int_V \rho (x^2 + y^2) dV \quad (14)$$

$$= \rho \int_0^R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \theta r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \quad (15)$$

$$= \rho \int_0^R r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (16)$$

$$= \rho \frac{R^5}{5} \frac{4}{3} 2\pi = \frac{8\pi\rho}{15} R^5 \quad (17)$$

当然, 式 (11) と同じ値になる.

3. 厚さを b とする.

$$I = \int_S \rho b (x^2 + y^2) dS \quad (18)$$

$$= \rho b R^2 \cdot 2\pi R \quad (19)$$

質量 M で割る.

$$\frac{I}{M} = \frac{\rho b R^2 \cdot 2\pi R}{\rho b \cdot 2\pi R} = R^2 \quad (20)$$

$$I = \underline{MR^2} \quad (21)$$

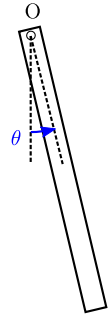
なお, 半径 R の円輪 (リング) の慣性モーメントも同じく $I = MR^2$ となる.

4. 円の慣性モーメントは $\frac{1}{2}MR^2$ である. 平行軸の定理より,

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \underline{\frac{3}{2}MR^2} \quad (22)$$

を得る. なお, 平行軸の定理を使わず, 直接計算することもできる.

問 2. 長さ l の棒の一端を点 O に固定し、平面運動させる。棒の線密度は一様であるとし、質量を M とする。棒には重力のみが作用するものとし、重力加速度を g とおく。以下の問に答えよ。



1. 固定点 O まわりの慣性モーメントを求めよ。
2. 棒が鉛直方向と角度 θ をなすとき、点 O まわりの重力によるモーメントを求めよ。
3. 角度 θ の値が常に微小 ($\sin \theta \sim \theta$) であるとき、この棒は単振動する。この単振動の角振動数 ω を求めよ。

解答

1. 線密度を ρ とおく。

となる。 $\sin \theta \sim \theta$ より、

$$I = \int_0^l \rho x^2 dx = \frac{\rho l^3}{3} = \frac{Ml^2}{3} \quad (23)$$

$$N = -\frac{Mlg}{2} \sin \theta \quad (27)$$

2. 微小区間 dx に作用するモーメントは $-(\rho dx)gx \sin \theta$ である。これを積分する。

である。これより、次式を得る。

$$\frac{Ml^2}{3} \ddot{\theta} = -\frac{Mlg}{2} \theta \quad (28)$$

$$N = -\rho g \sin \theta \int_0^l x dx \quad (24)$$

まとめると

$$= -\rho g \frac{l^2}{2} \sin \theta = -\frac{Mlg}{2} \sin \theta \quad (25)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2l} \theta = 0 \quad (29)$$

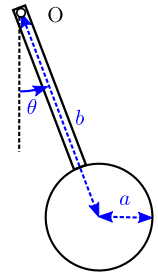
3. 回転の方程式から

となる。よって、角振動数は次式で与えられる。

$$\dot{L} = I\ddot{\theta} = N \quad (26)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}} \quad (30)$$

問 3. 長さ $b - a (> 0)$ の棒の一端を点 O に固定し、もう一端 A に半径 a 、質量 M の球をつける。この物体が平面運動するとき、以下の問に答えよ。ただし、棒の質量は無視できるとし、球の密度は一様である。また、重力加速度を g とする。



1. 固定点 O まわりの慣性モーメントを求めよ。
2. 棒が鉛直方向と角度 θ をなすとき、点 O まわりの重力によるモーメントを求めよ。
3. 角度 θ の値が常に微小 ($\sin \theta \sim \theta$) であるとき、この棒は単振動する。この単振動の角振動数 ω を求めよ。

解答

1. 球の慣性モーメントは $\frac{2}{5}Ma^2$ である。平行軸の定理より

$$I = I_c + Mh^2 = \left(\frac{2}{5}a^2 + b^2 \right) M \quad (31)$$

を得る。

2.

$$N = -Mgb \sin \theta \quad (32)$$

3. 回転の方程式から

$$I\ddot{\theta} = N \quad (33)$$

$\sin \theta \sim \theta$ より、

$$N = -Mgb\theta \quad (34)$$

となる。これより、

$$\left(\frac{2}{5}a^2 + b^2 \right) M\ddot{\theta} = -Mgb\theta \quad (35)$$

である。まとめると

$$\ddot{\theta} + \frac{gb}{\frac{2}{5}a^2 + b^2} \theta = 0 \quad (36)$$

を得る。よって、以下の角振動数を得る。

$$\omega = \sqrt{\frac{gb}{\frac{2}{5}a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{g}{b} \frac{1}{\frac{2}{5}\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}} \quad (37)$$

この問題は「ボルダの振り子」という名前で知られる問題である。

なお、 $a \ll b$ のとき、 $\omega = \sqrt{\frac{g}{b}}$ となり、1 質点の振り子と同じ値になる。