

氏名 _____

学籍番号 _____

問 1. 質量 m_i の質点が速度 $\dot{\mathbf{r}}_i$ で運動している質点系を考える．質点系の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i$$

で与えられる．この質点系の運動エネルギーを質量中心の位置 $\mathbf{r}_c$ および質量中心からの位置 $\mathbf{r}'_i$ を用いて表せ．
 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i$ である．質量 m_i の総和を M とする．

解答

$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i$ を代入すると，運動エネルギーは次のように表される．

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\mathbf{r}}_c + \dot{\mathbf{r}}'_i) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_c + \dot{\mathbf{r}}'_i) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_c \cdot \dot{\mathbf{r}}_c + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_c \cdot \dot{\mathbf{r}}'_i \right. \quad (2)$$

$$\left. + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_c + \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}}'_i \right) \quad (3)$$

右辺括弧内の第 2 項，第 3 項は，0 となる．なぜなら，

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \mathbf{0} \quad (4)$$

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \mathbf{0} \quad (5)$$

となるからである．

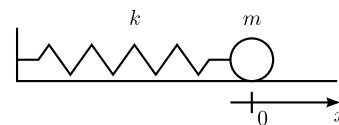
結局運動エネルギーとして以下の式を得る．

$$K = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_c \cdot \dot{\mathbf{r}}_c + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \cdot \dot{\mathbf{r}}'_i \quad (6)$$

右辺第一項は，質量中心に質量が集中したと考えたときの質点の運動エネルギーである．右辺第二項は，質量中心からみた質点系の相対的な運動の運動エネルギーである．

問 2.

バネ定数 k のバネの一端を壁に固定し、もう一端に質量 m の質点を付ける．バネの伸びがないとき、質点の位置を $x = 0$ とおく．以下の間に答えよ．



1. 以下の力学的エネルギー保存の法則を運動方程式から導出せよ．

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

ここに、 v_1, v_2 はそれぞれ時刻 t_1, t_2 における速度であり、位置 x_1, x_2 はそれぞれ時刻 t_1, t_2 における位置である．

2. バネによる復元力 kx に加えて、速度に抵抗する力 $c\dot{x}$ が加わる場合を考える．運動方程式は、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (\text{a})$$

となり、ここで、 $\omega_0 = \sqrt{k/m}, 2h\omega_0 = c/m$ とおくと

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (\text{b})$$

を得る． $h < 0, h = 1, h > 1$ の 3 つの場合に分けて、それぞれ x の一般解を求めよ（虚数を用いず実数のみで表せ）．

3. 抵抗力に加え、力 $F_0 \sin \omega t$ が作用する場合を考える．

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad (\text{c})$$

この方程式を解くため、この方程式を満たす解の一つを見つけよ．（ヒント： $x = A \sin(\omega t + \delta)$ とおき、 A, δ を求めればよい．）

解答

1. 運動方程式は以下の通り．

$$m\ddot{x} = -kx \quad (7)$$

を得る．これより、

$$\lambda = \omega_0 \left(-h \pm \sqrt{h^2 - 1} \right) \quad (13)$$

両辺に $\dot{x}$ を乗じて時刻 t_1 から t_2 まで時間積分する．

$$\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}\dot{x} \, dt = - \int_{t_1}^{t_2} kx\dot{x} \, dt \quad (8)$$

を得る．

(i) $h < 1$ のとき虚数を用いてルートの中を正とする．

$$\lambda = \omega_0 \left(-h \pm i\sqrt{1 - h^2} \right) \quad (14)$$

ここで、

$$\ddot{x}\dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 \right), \quad x\dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}x^2 \right) \quad (9)$$

解を線形和で表す．

$$x = e^{-h\omega_0 t} \left(C_1 e^{i\omega_0 \sqrt{1-h^2} t} + C_2 e^{-i\omega_0 \sqrt{1-h^2} t} \right) \quad (15)$$

を利用すると次式を得る．

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}kx^2 \right) dt \quad (10)$$

$$= e^{-h\omega_0 t} \left[(C_1 + C_2) \cos \left(\omega_0 \sqrt{1 - h^2} t \right) \right. \quad (16)$$

$$\left. + i(C_1 - C_2) \sin \left(\omega_0 \sqrt{1 - h^2} t \right) \right] \quad (17)$$

これより、以下の式を得る．

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \quad (11)$$

$A = C_1 + C_2, B = i(C_1 - C_2)$ とおくと、

$$x = e^{-h\omega_0 t} \left[A \cos \left(\omega_0 \sqrt{1 - h^2} t \right) + B \sin \left(\omega_0 \sqrt{1 - h^2} t \right) \right] \quad (18)$$

よって、運動エネルギー保存の法則が言える．

2. 式 (b) に $x = e^{\lambda t}$ を代入する．

$$\lambda^2 + 2h\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (12)$$

を得る． $e^{-h\omega_0 t}$ は単調減少であることから、時間とともに振幅が小さくなる振動となることが分かる．

(ii) $h = 1$ のとき

$\lambda = -\omega_0$ で重解となる .

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_0 t} \quad (19)$$

(iii) $h > 1$ のとき

$$\lambda = \omega_0 \left(-h \pm \sqrt{h^2 - 1} \right) \quad (20)$$

$$x = e^{-h\omega_0 t} \left(C_1 e^{\omega_0 \sqrt{h^2 - 1} t} + C_2 e^{-\omega_0 \sqrt{h^2 - 1} t} \right) \quad (21)$$

なお , (i) のときを減衰振動 (ii) のときを臨界減衰 , (iii) のときを過減衰と呼ぶ .

3.

質点に強制的な力が作用するいわゆる強制振動の問題である .

非斉次の線形微分方程式^{*1}の一般解は ,

- 斉次方程式としたときの一般解 (式 (b) の解)
- その方程式の特解 (式 (c) の解のひとつ)

の和で表される . 「斉次方程式としたときの一般解」は前問で解いている . x を求めるためには , 「特解」を求めれば良い . これが問題の意図である . 以下 , その方法を示す .

式 (c) の両辺を m で除す .

$$\ddot{x} + 2h\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \quad (22)$$

この解を

$$x = A \sin(\omega t + \delta) \quad (23)$$

とおく^{*2} .

式 (22) に $x = A \sin(\omega t + \delta)$ を代入すると次式を得る .

$$\begin{aligned} & -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta) + 2hA\omega_0\omega \cos(\omega t + \delta) \\ & + A\omega_0^2 \sin(\omega t + \delta) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \end{aligned} \quad (24)$$

式 (24) において , $\cos(\omega t + \delta)$, $\sin(\omega t + \delta)$ を展開する .

$$\begin{aligned} & -A\omega^2 \cos \delta \sin \omega t + A\omega^2 \sin \delta \cos \omega t \\ & + 2hA\omega_0\omega \cos \delta \cos \omega t + 2hA\omega_0\omega \sin \delta \sin \omega t \\ & + A\omega_0^2 \cos \delta \sin \omega t - A\omega_0^2 \sin \delta \cos \omega t \\ & = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \end{aligned} \quad (25)$$

式 (25) において , $\cos \omega t$ と $\sin \omega t$ の係数を比較することで次式を得る .

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A \cos \delta + 2h\omega_0\omega A \sin \delta = \frac{F_0}{m} \quad (26)$$

$$2h\omega_0\omega A \cos \delta + (-\omega_0^2 + \omega^2) A \sin \delta = 0 \quad (27)$$

上式は $A \cos \delta$ と $A \sin \delta$ についての連立一次方程式となっている . これらについて解くと ,

$$A \cos \delta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega_0^2\omega^2} \frac{F_0}{m} \quad (28)$$

$$A \sin \delta = \frac{2h\omega_0\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega_0^2\omega^2} \frac{F_0}{m} \quad (29)$$

を得る .

これより , A と δ が求まる^{*3} .

$$A = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega_0^2\omega^2}} \frac{F_0}{m} \quad (30)$$

$$\tan \delta = \frac{2h\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (31)$$

よって , 式 (23) が解のひとつであることが分かった . ただし , A, δ はそれぞれ式 (30), (31) で表される値である .

^{*1} 線形微分方程式 $\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = f(t)$ において , $f(t) = 0$ であれば斉次 , $f(t) \neq 0$ であれば非斉次と言う .

^{*2} 実際にこの形で解が表されるかどうかは計算してみないと分からない

^{*3} $x = A \sin(\omega t + \delta)$ においても問題ないことがここでようやく分かる .

おまけ その1

問2 小問2において, $h = 0, 0.28, 1, 2$ の4つのケースで質点がどのような運動をするか調べる. 条件として $\omega_0 = 1$, 時刻 $t = 0$ において $x = 1, \dot{x} = 0$ とする.

(1) $h = 0$ のとき

明らかに $x = \cos t$ となる.

(2) $h = 0.28$ のとき

式 (18) に初期条件を入ると次式を得る.

$$x(t=0) = A = 1 \quad (32)$$

$$\dot{x}(t=0) = -h\omega_0 A + \omega_0 \sqrt{1-h^2} B = 0 \quad (33)$$

これより, $A = 1, B = h/\sqrt{1-h^2} = 7/24$ となる.

(3) $h = 1$ のとき

式 (19) より,

$$x(t=0) = C_1 = 1 \quad (34)$$

$$\dot{x}(t=0) = -\omega_0 C_1 + C_2 = 0 \quad (35)$$

を得る. これより, $C_1 = 1, C_2 = \omega_0 C_1 = 1$ となる.

(4) $h = 2$ のとき

式 (21) より,

$$x(t=0) = C_1 + C_2 = 1 \quad (36)$$

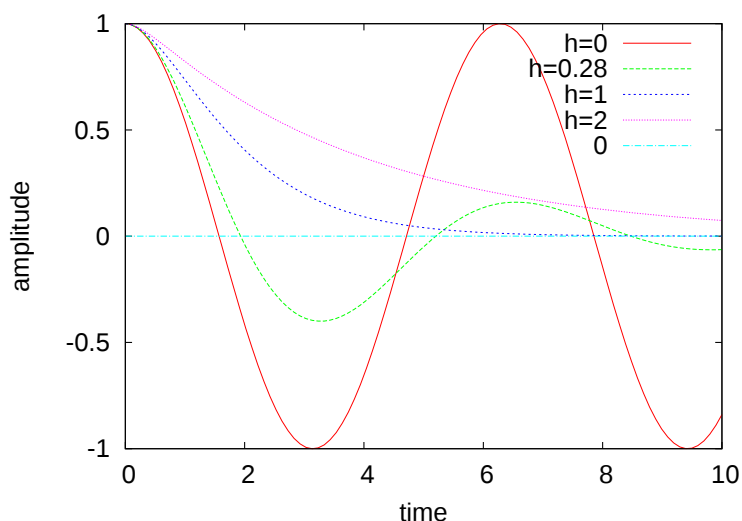
$$\dot{x}(t=0) = -h\omega_0 (C_1 + C_2) + \omega_0 \sqrt{h^2 - 1} (C_1 - C_2) = 0 \quad (37)$$

を得る. これより,

$$C_1 = \frac{\omega_0 h + \omega_0 \sqrt{h^2 - 1}}{2\omega_0 \sqrt{h^2 - 1}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \quad (38)$$

$$C_2 = \frac{-\omega_0 h + \omega_0 \sqrt{h^2 - 1}}{2\omega_0 \sqrt{h^2 - 1}} = \frac{-2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \quad (39)$$

となる. 以下に図を示す.



このお絵描きをしたときの gnuplot のコマンドは以下の通り.

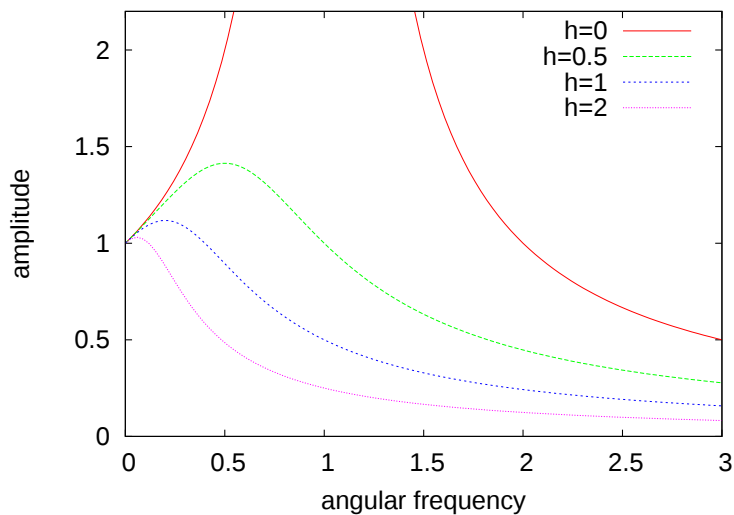
```
gnuplot> p=sqrt(1-0.28**2)
gnuplot> c1=(2.+sqrt(3.))/(2*sqrt(3.))
gnuplot> c2=(-2.+sqrt(3.))/(2*sqrt(3.))
gnuplot> set xlabel 'time'
gnuplot> set ylabel 'amplitude'
gnuplot> plot [0:10][ -1:1]cos(x) title 'h=0',\
exp(-0.28*x)*(cos(p*x)+7./24.*sin(p*x))title 'h=0.28',\
(1+x)*exp(-x) title 'h=1',\
exp(-2*x)*(c1*exp(sqrt(3)*x)+c2*exp(-sqrt(3)*x)) title 'h=2', 0
gnuplot> set terminal postscript eps 24 color
gnuplot> set output 'osc.eps'
gnuplot> replot
```

おまけ その2

問2 小問3において，強制振動の角振動数 ω と振幅の関係を調べる．式 (30) より，次式を得る．

$$\frac{mA\omega_0^2}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left(2h\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (40)$$

左辺を縦軸， ω/ω_0 を横軸にとると，以下のようなグラフを得る． $h = 0, 0.5, 1, 2$ の4つの場合をプロットしている．図から分かるように $h = 0$ のとき， $\omega = 1$ を与えると振幅は無限大になる．また， $h \neq 0$ においても， A の値が極大となる ω が表れる．このように，極大が現れる減少を共鳴と呼ぶ^{*4}．なお，下図は共鳴曲線と呼ばれる．



このお絵描きをしたときの gnuplot のコマンドは以下の通り．

```
gnuplot> f(h,x)=1/sqrt((1-x)**2+(2*h*x)**2)
gnuplot> set xlabel 'angular frequency'
gnuplot> set ylabel 'amplitude'
gnuplot> plot[0:3][0:2.2] f(0,x) title 'h=0', \
f(0.5,x) title 'h=0.5', f(1,x) title 'h=1', f(2,x) title 'h=2'
gnuplot> set terminal postscript eps 24 color
gnuplot> set output 'frc.eps'
gnuplot> replot
```

^{*4} 「構造物を作るときは，地震（強制力）の角振動数によって共鳴が起きないようにする必要がある．」ということは他の講義で勉強するはずですが，多分．