

5 月 20 日の授業の追加説明 .

レポートを解く上で下記の知識が必要です . 基本的に 1 質点のときと同じです . また , 次回の授業で説明します .

質点系の運動量保存の法則

質点系の運動方程式 $\dot{P} = \sum F_i$ において , $\sum F_i = 0$ であれば , $\dot{P} = 0$, すなわち , P が定ベクトルとなる .

質点系の運動量の変化

時間 t_1 から t_2 まで積分する .

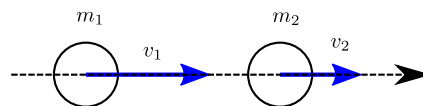
$$P(t_2) - P(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \sum F_i \, dt$$

右辺は外力による力積の総和 .

氏名

学籍番号

問 1. 2 つの質点が同一直線上を運動している．それぞれの質量を m_1 , m_2 , 速度を v_1, v_2 とする．この 2 つの質点が衝突したのち, 質点の速度がそれぞれ v'_1, v'_2 となった．以下の問に答えよ．



1. v'_2 を m_1, m_2, v_1, v_2, v'_1 を用いて表せ．
2. 衝突後の運動エネルギーの減少量を ΔK とする． ΔK が最大となる
ときの速度 v'_1, v'_2 を求めよ．

解答

1. 運動量保存則より,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \quad (1)$$

よって,

$$v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 v'_1}{m_2} \quad (2)$$

を得る．

- 2.

$$\Delta K = \frac{m_1}{2} v_1^2 + \frac{m_2}{2} v_2^2 - \left(\frac{m_1}{2} v'^2_1 + \frac{m_2}{2} v'^2_2 \right) \quad (3)$$

式 (3) に式 (2) を代入する．

$$\Delta K = K_0 - \left[\frac{m_1}{2} v'^2_1 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{P_0 - m_1 v'_1}{m_2} \right)^2 \right] \quad (4)$$

ここで, 衝突前の運動量, 運動エネルギーをそれぞれ P_0, K_0 とおいた．

最大値を求めるため, v'_1 で微分する．

$$\frac{d\Delta K}{dv'_1} = - \left[m_1 v'_1 + m_2 \left(\frac{P_0 - m_1 v'_1}{m_2} \right) \left(-\frac{m_1}{m_2} \right) \right] \quad (5)$$

$$= - \left(\frac{m_1}{m_2} \right) [P_0 - (m_1 + m_2) v'_1] \quad (6)$$

よって, $\frac{d\Delta K}{dv'_1} = 0$ となるのは,

$$v'_1 = \frac{P_0}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (7)$$

のときである．式 (7) を式 (2) に代入すると,

$$v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (8)$$

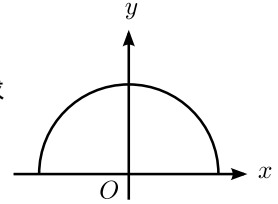
を得る．よって, ΔK が最大となるのは,

$$v'_1 = v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (9)$$

のときである．すなわち, 衝突後, 2 つの質点が一体となって運動するとき, 運動エネルギーが最も減少する．

問 2.

1. 半径 R , 面密度 ρ の半円 (中身が詰まっている) の質量中心の座標を求めよ .
2. 半径 R , 線密度 ρ の半円殻 (中身がない) の質量中心の座標を求めよ .



解答

1. $x_c = 0$ は明らか . y_c を計算する .

$$y_c = \frac{\int_S \rho y dS}{\int_S \rho dS} \quad (10)$$

ここで , $y = r \sin \theta$, および $dS = r dr d\theta$ を用いる .

$$y_c = \frac{2}{\pi \rho R^2} \int_0^R \int_0^\pi \rho r^2 \sin \theta dr d\theta \quad (11)$$

$$= \frac{2}{\pi \rho R^2} \rho \frac{R^3}{3} 2 = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} \quad (12)$$

よって , 重心の位置は , $\left(0, \frac{4R}{3\pi} \right)$ となる .

2. $x_c = 0$ は明らか . y_c を計算する .

$$y_c = \frac{\int_l \rho y dl}{\int_l \rho dl} \quad (13)$$

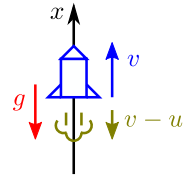
ここで , $y = R \sin \theta$, および $dl = R d\theta$ を用いる .

$$y_c = \frac{1}{\pi \rho R} \int_0^\pi \rho R \sin \theta R d\theta \quad (14)$$

$$= \frac{1}{\pi \rho R} \rho R^2 \cdot 2 = \frac{2}{\pi} R \quad (15)$$

よって , 重心の位置は , $\left(0, \frac{2R}{\pi} \right)$ となる .

問 3. 単位時間あたり質量 μ の燃料を相対速度 u で下方に噴出しながら上昇するロケットがある。ただし、 x は鉛直上向きを正にとる。また、重力加速度を g とする。なお、 $t = 0$ において、ロケットの質量は $m(t = 0) = m_0$ 、速度は $v(t = 0) = 0$ である。以下の問に答えよ。



1. 時刻 t におけるロケットの質量 $m_r(t)$ を求めよ。ただし、ロケットの質量にはロケット内の燃料も含む。
2. 時刻 t におけるロケットの速度を v とする。時刻 t におけるロケットの運動量 $P_r(t)$ を求めよ。
3. 時刻 $t + \Delta t$ におけるロケットの質量 $m_r(t + \Delta t)$ を求めよ。
4. 時刻 $t + \Delta t$ におけるロケットの速度を $v + \Delta v$ とする。時刻 $t + \Delta t$ におけるロケットの運動量 $P_r(t + \Delta t)$ を求めよ。2 次の微小項は無視して良い。
5. 時刻 t から $t + \Delta t$ の間に噴出される燃料の質量 $m_f(t + \Delta t)$ を求めよ。
6. 時刻 t から $t + \Delta t$ の間に噴出される燃料の時刻 $t + \Delta t$ における運動量 $P_f(t + \Delta t)$ を求めよ。2 次の微小項は無視して良い。
7. 時刻 t から $t + \Delta t$ の間に、ロケットおよびその間に噴出した燃料に対して重力が与える力積 $\bar{F}$ を求めよ。
8. 時刻 t から $t + \Delta t$ の運動量の変化量がその間に与えられた力積と等しいことを用いて、時刻 t における速度 v を求めよ。

解答

1.

$$m_r(t) = m_0 - \mu t \quad (16)$$

2.

$$P_r(t) = (m_0 - \mu t) v \quad (17)$$

3.

$$m_r(t + \Delta t) = m_0 - \mu(t + \Delta t) \quad (18)$$

4.

$$P_r(t + \Delta t) = [m_0 - \mu(t + \Delta t)](v + \Delta v) \quad (19)$$

2 次の微小項を消去すると、次式を得る。(消去しなくても良い。)

$$P_r(t + \Delta t) \sim (m_0 - \mu t)(v + \Delta v) - \mu v \Delta t \quad (20)$$

5.

$$m_f = \mu \Delta t \quad (21)$$

6. 時刻 t から $t + \Delta t$ でロケットの速度は、 v から $v + \Delta v$ に変化する。燃料は相対速度 u で後方に噴出されるので、燃料の速度は $v - u$ から $v + \Delta v - u$ の値を取る。つまり、この時間における燃料の速度の平均速度は、 $v + \alpha \Delta v - u$ で表される。 α は 0 から 1 までの適当な値である。よって、燃料の運動エネルギーは次式で与えられる。

$$P_f(t + \Delta t) = \mu \Delta t (v + \alpha \Delta v - u) \quad (22)$$

$$\sim \mu \Delta t (v - u) \quad (23)$$

7. 時刻 t 以降にロケットと噴出される燃料の質量の和は、 $m_0 - \mu t$ である。つまり、

$$\bar{F} = -(m_0 - \mu t) g \Delta t \quad (24)$$

である。

8. 題意より、

$$P_r(t + \Delta t) + P_f(t + \Delta t) - P_r(t) = \bar{F} \quad (25)$$

である。これを計算すると、

$$(m_0 - \mu t) \Delta v - \mu u \Delta t = -(m_0 - \mu t) g \Delta t \quad (26)$$

$\Delta t \rightarrow 0$ とすると、

$$(m_0 - \mu t) dv - \mu u dt = -(m_0 - \mu t) g dt \quad (27)$$

となる。これを変数分離で解く。

$$dv = \left(\frac{\mu u}{m_0 - \mu t} - g \right) dt \quad (28)$$

両辺積分して、

$$v = -u \ln(m_0 - \mu t) - gt + C \quad (29)$$

$t = 0$ において $v = 0$ より C が決まる。

$$v = u \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t} - gt \quad (30)$$