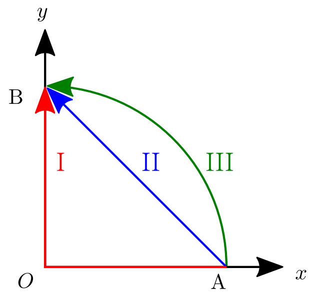
氏名 ______________________　学籍番号 ______________________

問 1.　質点が $F_x = axy, F_y = by^2$ の力を受けている．この質点が点 A から点 B まで運動する．点 A および点 B の座標はそれぞれ $(R,0),(0,R)$ である．このとき，以下の問に答えよ．

1. 線分 AO，OB を通るとき（経路 I），力のなす仕事を求めよ．
2. 線分 AB を通るとき（経路 II），力のなす仕事を求めよ．
3. 半径 R の弧 AB を通るとき（経路 III），力のなす仕事を求めよ．



解答

仕事の定義を元に，経路積分を行う．

1.

$$W = \int_{\mathrm{I}} F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y \tag{1}$$
$$= \int_{\mathrm{AO}} F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + \int_{\mathrm{OB}} F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y \tag{2}$$
$$= \int_R^0 F_x \mathrm{d}x + \int_0^R F_y \mathrm{d}y \tag{3}$$
$$= \int_R^0 0 \ \mathrm{d}x + \int_0^R by^2 \mathrm{d}y \tag{4}$$
$$= \underline{\frac{R^3}{3} b} \tag{5}$$

x 軸上では $\mathrm{d}y = 0$，y 軸上では $\mathrm{d}x = 0$ を用いた．また，x 軸上では $y = 0$ より，$F_x = axy = 0$ である．

2. y を x を用いて表すと，$y = R - x$ となる．これより，$\mathrm{d}y = -\mathrm{d}x$．これより，仕事は以下のように計算できる．

$$W = \int_{\mathrm{I}} F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y \tag{6}$$
$$= \int_0^R \left(a(R-y)y \cdot (-1) + by^2\right) \mathrm{d}y \tag{7}$$
$$= \int_0^R \left(-aRy + (a+b)y^2\right) \mathrm{d}y \tag{8}$$
$$= -aR\frac{R^2}{2} + (a+b)\frac{R^3}{3} \tag{9}$$
$$= \underline{\frac{R^3}{6}(-a+2b)} \tag{10}$$

なお、パラメータ変数を用いるのであれば $x = t, y = R - t$ とおいて，$\mathrm{d}x = \mathrm{d}t, \mathrm{d}y = -\mathrm{d}t$ として計算する．

3. 極座標で表現すると，

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta \tag{11}$$

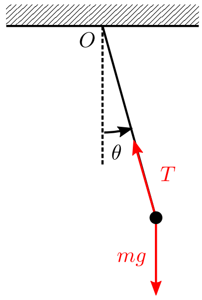
と書ける. これより，x, y の微分は

$$\mathrm{d}x = -R\sin\theta \ \mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}y = R\cos\theta \mathrm{d}\theta \tag{12}$$

となる．これより，仕事は以下のように計算できる．

$$W = \int_{\mathrm{III}} F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y \tag{13}$$
$$= \int_0^{\pi/2} \left(-aR^2\cos\theta\sin\theta \cdot R\sin\theta + bR^2\sin^2\theta \cdot R\cos\theta\right) \mathrm{d}\theta \tag{14}$$
$$= R^3(-a+b)\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin^2\theta \mathrm{d}\theta \tag{15}$$
$$= \underline{\frac{R^3}{3}(-a+b)} \tag{16}$$

問 2.　図に示すような振り子を考える．ひもの長さは L で，質量は無視できるものとする．ひもと鉛直方向がなす角度を θ とおく．また，質点の質量を m，重力加速度を g，ひもの張力を T とする．時刻 $t=0$ において，$\theta=0, \dot{\theta}=\omega_0$ とする．



1. ひもの固定端を原点 O とする極座標を考え，半径方向の運動方程式を書け．
2. 張力 T を $m, L, g, \theta, \dot{\theta}$ を用いて表せ．
3. $\theta=0$ のとき，位置エネルギー $U=0$ とする．角速度 $\dot{\theta}$ で運動しているときの力学的エネルギーを求めよ．
4. 力学的エネルギー保存の法則より，張力 T を $m, L, g, \theta, \omega_0$ で表せ．
5. 張力 T が最大となるとき，θ の値を求めよ．

解答

1. 半径方向の運動方程式は，

$$F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \tag{17}$$

$F_r = -T + mg\cos\theta$，$r = L$（一定）より，

$$-T + mg\cos\theta = -mL\dot{\theta}^2 \tag{18}$$

2.

$$T = mL\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \tag{19}$$

3.　速度 v と角速度 $\dot{\theta}$ の関係，$v = L\dot{\theta}$ を用いると，運動エネルギーは次式で表される．

$$K = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 \tag{20}$$

位置エネルギーは以下の通りである．

$$U = mgL\left(1-\cos\theta\right) \tag{21}$$

よって，力学的エネルギーは

$$K + U = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL\left(1-\cos\theta\right) \tag{22}$$

となる．

4.

力学的エネルギー保存の法則より，次式が成立する．

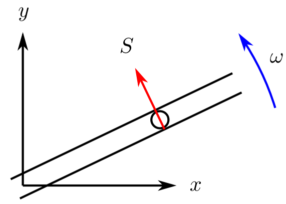
$$\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mgL\left(1-\cos\theta\right) = \frac{1}{2}mL^2{\omega_0}^2 \tag{23}$$

式 (19) から，式 (23) を用いて $\dot{\theta}$ を消去すると，次式を得る．

$$T = mL{\omega_0}^2 + mg\left(-2+3\cos\theta\right) \tag{24}$$

5.　式 (24) より，張力 T が最大となるのは，$\cos\theta = 1$ のときである．このとき，$\theta = 0$ である．

問 3.　筒の中に質量 m の質点（小さな球）がある．この筒を原点を中心に水平面内で一定の角速度 ω で回転させる．筒と質点には摩擦は作用しないと仮定する．時刻 t において，原点からの距離 r，および筒が質点に与える力 S はそれぞれ次式で与えられる．



$$
\begin{aligned}
r &= r_0 \cosh \omega t \\
S &= 2mr_0\omega^2 \sinh \omega t
\end{aligned}
$$

ここで，r_0 は定数である．以下の問に答えよ．

1. 時刻 $t = 0$ における運動エネルギーを求めよ．
2. 時刻 $t = \bar{t}$ における運動エネルギーを求めよ．
3. 時刻 $t = 0$ から $t = \bar{t}$ の間に筒が質点にした仕事を求めよ．
4. 時刻 $t = 0$ から $t = \bar{t}$ の間に増加した運動エネルギーと筒が質点にした仕事が等しいことを確認せよ．

解答

1.　まず，時刻 t における速度を考える．半径方向の速度は，

$$\dot{r} = r_0\omega \sinh \omega t \tag{25}$$

である．周方向の速度は，

$$r\omega = r_0\omega \cosh \omega t \tag{26}$$

である．よって，運動エネルギーは次式で表される．

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + (r\omega)^2\right) \qquad (27)\\
&= \frac{m}{2}\left[{r_0}^2\omega^2\left(\sinh^2 \omega t + \cosh^2 \omega t\right)\right] \qquad (28)
\end{aligned}
$$

特に，$t = 0$ のとき，運動エネルギーは

$$\underline{K = \frac{1}{2}m{r_0}^2\omega^2} \tag{29}$$

となる．

2.　式 (28) に $t = \bar{t}$ を代入すると次式を得る．

$$\underline{K = \frac{1}{2}m{r_0}^2\omega^2\left(\sinh^2 \omega\bar{t} + \cosh^2 \omega\bar{t}\right)} \tag{30}$$

3.　筒が質点に与える力は常に周方向である．

$$
\begin{aligned}
W &= \int_0^{\bar{t}} \boldsymbol{F}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}\ \mathrm{d}t \qquad (31)\\
&= \int_0^{\bar{t}} Sr\omega\ \mathrm{d}t \qquad (32)\\
&= \int_0^{\bar{t}} 2m{r_0}^2\omega^3 \cosh \omega t \sinh \omega t\ \mathrm{d}t \qquad (33)
\end{aligned}
$$

ここで，$u = \sinh \omega t$ とおく．$\bar{u} = \sinh \omega\bar{t}$ とおく．微分は $\mathrm{d}u = \omega \cosh \omega t\ \mathrm{d}t$ となる．

$$
\begin{aligned}
W &= 2m{r_0}^2\omega^2 \int_0^{\bar{t}} \sinh \omega t\,(\omega \cosh \omega t)\ \mathrm{d}t \qquad (34)\\
&= 2m{r_0}^2\omega^2 \int_0^{\bar{u}} u\ \mathrm{d}u \qquad (35)\\
&= m{r_0}^2\omega^2 \left[u^2\right]_0^{\bar{u}} \qquad (36)\\
&= m{r_0}^2\omega^2\bar{u}^2 \qquad (37)\\
&= \underline{m{r_0}^2\omega^2 \sinh^2 \omega\bar{t}} \qquad (38)
\end{aligned}
$$

4.　式 (30) から式 (29) を引くと運動エネルギーの増分を得る．

$$
\begin{aligned}
\Delta K &= \frac{1}{2}m{r_0}^2\omega^2\left(\sinh^2 \omega\bar{t} + \cosh^2 \omega\bar{t} - 1\right) \qquad (39)\\
&= m{r_0}^2\omega^2 \sinh^2 \omega\bar{t} \qquad (40)
\end{aligned}
$$

ここで，$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ の関係式を用いた．
以上より，運動エネルギーの増加量と仕事が等しいことが分かる．