一般力学（T1T2） 2013/05/08 5 回目レポート　　　　返却を希望する場合は丸で囲む $\Rightarrow$　返却希望

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問 1. 関数 $f(x,y,z)$ の全微分 $\mathrm{d}f$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ を用いて表せ.

解答

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

問 2. $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とする．次の 3 つの関数の勾配をそれぞれ求めよ.

1. $f = r^2$
2. $f = r$
3. $f = \dfrac{1}{r}$

解答

それぞれ，x に関する偏微分を考える．y, z に関する偏微分は同様に計算できる.

1.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right) = 2x \tag{1}$$

よって，次式を得る.

$$\boldsymbol{\nabla} f = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{Bmatrix} \tag{2}$$

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{3}$$

これより，次式を得る.

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{1}{r}\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{4}$$

なお，$|\boldsymbol{\nabla} f| = 1$ であり，$\boldsymbol{\nabla} f$ は単位ベクトルである.

2. の**別解**　$r^2 = x^2+y^2+z^2$ を両辺 x で偏微分すると，

$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \tag{5}$$

を得る．両辺 $2r$ で除して，

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \tag{6}$$

3.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{x}{r}\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{x}{r^3} \tag{7}$$

よって，次式を得る.

$$\boldsymbol{\nabla} f = -\frac{1}{r^3}\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{8}$$

この式を以下のように見れば，大きさが $\dfrac{1}{r^2}$ で原点を向くベクトルであることが分かる.

$$\boldsymbol{\nabla} f = -\frac{1}{r^2}\begin{Bmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{Bmatrix} \tag{9}$$

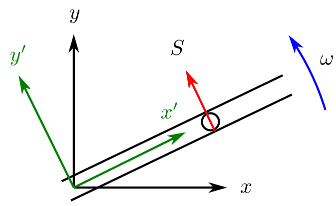
補足

3. は，ただの合成関数の微分である.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \tag{10}$$

というおなじみの式に，$f(r) = \dfrac{1}{r}$，$r = g(x) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ を当てはめている．x による偏微分なので，y, z は固定して考えればよい.

問 3. 筒の中に質量 m の質点（小さな球）がある．この筒を原点を中心に水平面内で 一定の角速度 ω で回転させる．筒と質点には摩擦は作用しないと仮定する．ここで，筒に沿って x' 軸，それに直交する方向に y' 軸をとり，xy 座標系に対して反時計まわりに ωt 回転している座標系 $x'y'$ を考える（時刻 $t=0$ において，x 軸と x' 軸は一致しているとする）．原点と質点の距離を x'，筒が質点に与える力の大きさを S とおく．時刻 $t=0$ において，$x'=r_0>0, \dot{x}'=0$ となるとき，以下の問に答えよ．



1. x' 方向の運動方程式を書け．
2. 1. で導出した運動方程式を解き，x' を時刻 t で表せ．
3. y' 方向の運動方程式を書け．
4. 3. で導出した運動方程式から，拘束力 S を求めよ．

解答

1. x' 方向の運動方程式は，遠心力 $mx'\omega^2$ が作用していると考え，

$$m\ddot{x}' = F_{x'} + m\omega^2 x' \tag{11}$$

となる．$F_{x'}=0$ であるから，

$$m\ddot{x}' = m\omega^2 x' \tag{12}$$

を得る．

2. 式 (12) より，

$$\ddot{x}' - \omega^2 x' = 0 \tag{13}$$

線形微分方程式を解き，初期条件を考慮すると答えを得る[*1]．

$$x' = r_0 \cosh \omega t \tag{14}$$

3. y' 方向の運動方程式はコリオリ力が作用していると考え，

$$F_{y'} - 2m\omega\dot{x}' = m\ddot{y}' \tag{15}$$

となる．$F_{y'}=S, \ddot{y}'=0$ より，

$$S - 2m\omega\dot{x}' = 0 \tag{16}$$

となる．

4. 式 (16) に式 (14) を代入すると，

$$S = 2m\omega^2 r_0 \sinh \omega t \tag{17}$$

を得る．

[*1] 第 1 回目のレポートの解答を参考にせよ．