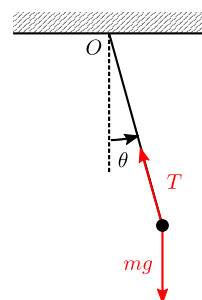


氏名

学籍番号

問 1. 図に示すような振り子を考える. ひもの長さは L で, 質量は無視できるものとする. 質点の質量を m , 重力加速度を g , ひもの張力を T とする. ひもの固定端を原点 O とする極座標を考え, 以下の問に答えよ.



1. 周方向の運動方程式を書け.
2. θ が十分小さく, $\sin \theta \sim \theta$ とみなせるとき, θ を時刻 t で表せ. ただし, 時刻 $t = 0$ において, $\theta = 0, \dot{\theta} = \omega_0$ であるとする.
3. 半径方向の運動方程式を書け.
4. θ が十分小さく, $\cos \theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}$ とみなせるとき, 張力 T を求めよ.
5. 張力 T が最大となる θ の値を求めよ.

解答

1. 周方向の運動方程式は

$$F_\theta = m \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \quad (1)$$

である. $F_\theta = -mg \sin \theta$, および $r = L$ (一定) より

$$-mg \sin \theta = mL\ddot{\theta} \quad (2)$$

2. 式 (2) および $\sin \theta \sim \theta$ より

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (3)$$

を得る. よって,

$$\theta = A \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t + B \sin \sqrt{\frac{g}{L}} t \quad (4)$$

となる. 時刻 $t = 0$ において, $\theta = 0, \dot{\theta} = \omega_0$ であるので, $A = 0, B = \omega_0 \sqrt{\frac{L}{g}}$ となる. よって, 次式を得る.

$$\theta = \omega_0 \sqrt{\frac{L}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{L}} t \quad (5)$$

3. 半径方向の運動方程式は,

$$F_r = m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \quad (6)$$

$$F_r = -T + mg \cos \theta, \cos \theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}, r = L \text{ より,}$$

$$T = mg \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) + mL \dot{\theta}^2 \quad (7)$$

4. 式 (5) より次式を得る.

$$\dot{\theta} = \omega_0 \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t \quad (8)$$

式 (7) に式 (5), (8) を代入すると張力 T を得る. すると,

$$\begin{aligned} T &= mg - \frac{1}{2} mL \omega_0^2 \sin^2 \sqrt{\frac{g}{L}} t + mL \omega_0^2 \cos^2 \sqrt{\frac{g}{L}} t \\ &= mg + mL \omega_0^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \sqrt{\frac{g}{L}} t \right) \end{aligned} \quad (9)$$

5. 式 (9) より, 張力 T が最大となるのは,

$$\sin \sqrt{\frac{g}{L}} t = 0 \quad (10)$$

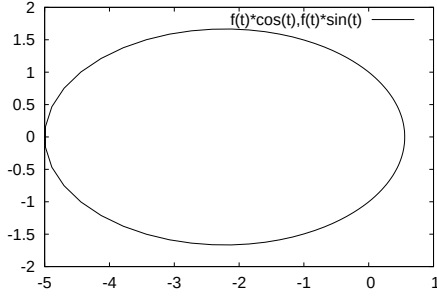
のときである. このとき, 式 (5) より $\theta = 0$ となる.

問 2. 中心力 F_r を受けて、 $r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ の軌道を描いて平面運動をしている質点がある。ただし、 $0 < \varepsilon < 1$, $r_0 > 0$ とする。以下の間に答えよ*1。

1. この質点の軌道を描け。 (ε, r_0) の値は適当に決めること。
2. 角運動量の大きさは一定で、 $mr^2\dot{\theta} = h$ とする。中心力 F_r の大きさを $h, r_0, m, r, \varepsilon$ の一部あるいは全てを用いて表せ。

解答

1. $\varepsilon = 0.8, r_0 = 1$ とすると以下のようなになる*2。



2. 半径方向の力は次式で与えられる。

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (11)$$

問題より、 $\dot{\theta} = \frac{h}{mr^2}$ であることが分かっているので、 $\ddot{r}$ を求めるだけでよい。

以下、 $\ddot{r}$ を導出する。まず、

$$r = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (12)$$

より、次式を得る。

$$1 + \varepsilon \cos \theta = \frac{r_0}{r} \quad (13)$$

両辺、時間微分し、次式を得る。

$$-\varepsilon (\sin \theta) \dot{\theta} = -\frac{r_0}{r^2} \dot{r} \quad (14)$$

ここで、 $mr^2\dot{\theta} = h$ を用いて $\dot{\theta}$ を消去する。

$$\dot{r} = \frac{\varepsilon h}{mr_0} \sin \theta \quad (15)$$

もう一度、時間微分をして、 $mr^2\dot{\theta} = h$ を使うと、 θ を含まない形で $\ddot{r}$ を得る。

$$\ddot{r} = \frac{\varepsilon h}{mr_0} (\cos \theta) \dot{\theta} \quad (16)$$

$$= \frac{\varepsilon h^2}{m^2 r_0 r^2} \cos \theta \quad (17)$$

$$= \frac{h^2}{m^2 r_0 r^2} \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right) \quad (18)$$

式 (18) を式 (11) に代入すると、 F_r を得る。

$$F_r = m \left\{ \frac{h^2}{m^2 r_0 r^2} \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right) - r \frac{h^2}{m^2 r^4} \right\} \quad (19)$$

$$= -\frac{h^2}{mr_0 r^2} \quad (20)$$

*1 この手の問題はただの計算であり本質的ではないので、試験には出しません。

*2 例えば、gnuplot でお絵描きするためのコマンドは以下の通り。

gnuplot> set size ratio -1 # 縦横比を 1:1 にする。

gnuplot> set parametric # パラメータを使う。gnuplot の仕様に従い、 θ の代わりに t を使う。

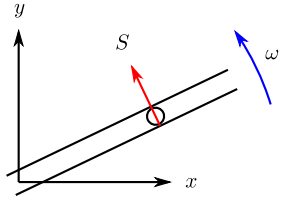
gnuplot> e=0.8 # 例えば、 $e = (\varepsilon)$ を 0.8 にする。

gnuplot> r0=1 # $r_0 (= r_0)$ を 1 にする。

gnuplot> f(t)=r0/(1+e*cos(t)) # 原点からの距離 r を関数 f で定義する。

gnuplot> plot [0:2*pi] f(t)*cos(t),f(t)*sin(t) # x, y 座標を出力させる。 t の範囲は 0 から 2π まで

問 3. 筒の中に質量 m の質点（小さな球）がある．この筒を原点を中心に水平面内で一定の角速度 ω で回転させる．筒と質点には摩擦は作用しないと仮定する．また、筒が質点に与える力の大きさを S ，原点と質点の距離を r とおく．時刻 $t = 0$ において、質点が x 軸上にあり、 $r = r_0 > 0, \dot{r} = 0$ となるとき、以下の問に答えよ．



1. 半径方向の運動方程式を書け．
2. 1. で導出した運動方程式から、距離 r を時刻 t で表せ．
3. 周方向の運動方程式を書け．
4. 3. で導出した運動方程式から、拘束力 S を求めよ．

解答

1. 半径方向の運動方程式は、

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (21)$$

である． $F_r = 0, \dot{\theta} = \omega$ であるため、

$$0 = m(\ddot{r} - r\omega^2) \quad (22)$$

となる．

2. 式 (22) より、

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0 \quad (23)$$

を得る．この線形微分方程式を解き、初期条件を考慮すると答えを得る*3．

$$r = r_0 \cosh \omega t \quad (24)$$

3. 周半径方向の運動方程式は以下の通り．

$$F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \quad (25)$$

$F_\theta = S, \dot{\theta} = \omega$ (一定), および式 (24) から

$$S = 2m\omega\dot{r} \quad (26)$$

を得る．

4. 式 (26) に式 (24) を代入すると、

$$S = 2m\omega^2 r_0 \sinh \omega t \quad (27)$$

を得る．

*3 第 1 回目のレポートの解答を参考にせよ．