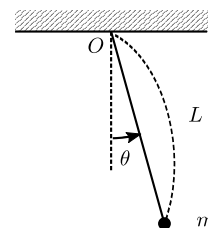


氏名

学籍番号

問 1. 図に示すような振り子を考える. ひもの長さは L で, 質量は無視できるものとする. 質点の質量を m , 重力加速度を g とする. ひもの固定端を原点 O とする.

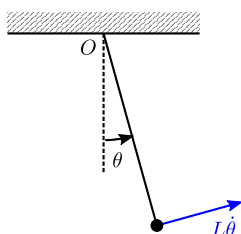


1. 点 O まわりの角運動量 l を求めよ. (反時計まわりを正とする.)
2. 点 O まわりのモーメント N を求めよ.
3. 点 O まわりの回転の方程式を書け.
4. θ が十分小さく, $\sin \theta \sim \theta$ とみなせるとき, θ を時刻 t で表せ. ただし, 時刻 $t = 0$ において, $\theta = \theta_0, \dot{\theta} = 0$ となる.

解答

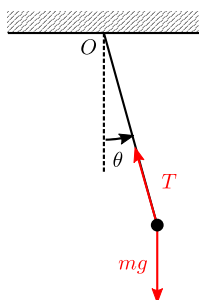
1. 質点の速度は $L\dot{\theta}$ である. また, 位置ベクトルと速度ベクトルは直交するので, 運動量は次式で得られる.

$$l = L \cdot m L \dot{\theta} = m L^2 \dot{\theta} \quad (1)$$



2. 質点に作用する力はひもが質点を引っ張る張力 T と鉛直下向きに作用する重力 mg のみである. 張力は中心力であるため, 張力によるモーメントは 0 となる. 位置ベクトルと重力のベクトルは θ の角をなす. 力のモーメントは以下の式で与えられる. (正負に注意!)

$$N = -L \cdot mg \sin \theta \quad (2)$$



3. $\dot{l} = N$ に式 (1), (2) を代入すると

$$m L^2 \ddot{\theta} = -m L g \sin \theta \quad (3)$$

を得る. 両辺 $m L^2$ で除してまとめると, 次式を得る.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 \quad (4)$$

4. 式 (4) において $\sin \theta \sim \theta$ を代入すると

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0 \quad (5)$$

を得る. よって,

$$\theta = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t + \delta \right) \quad (6)$$

となる^{*1}. 時刻 $t = 0$ において, $\theta = \theta_0, \dot{\theta} = 0$ であるので, $A = \theta_0, \delta = 0$ となる. よって次式を得る.

$$\theta = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t \quad (7)$$

補足 式 (5) の解の導出:

$\theta = e^{\lambda t}$ とおくと, $\lambda = \pm i \sqrt{\frac{g}{L}}$ を得る. これより,

$$\theta = C_1 e^{i \sqrt{\frac{g}{L}} t} + C_2 e^{-i \sqrt{\frac{g}{L}} t} \quad (8)$$

となる^{*2}. オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いると,

$$\theta = A \cos \sqrt{\frac{g}{L}} t + B \sin \sqrt{\frac{g}{L}} t \quad (9)$$

$$A = C_1 + C_2, \quad B = i(C_1 - C_2) \quad (10)$$

となる. θ は角度であり, 当然実数であるため, 係数 A, B は実数となる. 三角関数の合成をすると,

$$\theta = A' \cos \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t + \delta \right) \quad (11)$$

$$A' = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t + \delta \right) = \frac{B}{A} \quad (12)$$

となる.

^{*1} 補足参照

^{*2} C_1, C_2 は実数とは限らない. 虚数も取りうる.

おまけ

レポートを出したかどうかウェブ上でチェックしたい場合、以下に 3 文字の文字列を書け。希望しない場合は、書く必要はない。文字はアルファベットか数字のみとする。例えば、学籍番号下 4 桁が 1234 で、fft を文字列とする場合、レポート提出の確認は、

<http://basewall.kuciv.kyoto-u.ac.jp/mech/1234fft/>

で行うことができる（ようなシステムを作る予定である）。ただし、ウェブ上でアップするので、他人に見られる可能性があることに注意せよ。