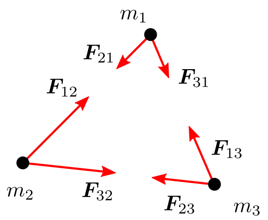
氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問 1. 下図のように 3 つの質点に内力のみが作用し，外力が作用しない場合，3 つの質点の運動量の和が一定であることを示せ．



3 つの質点の運動方程式は以下の通り

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1) = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{31} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2) = \boldsymbol{F}_{32} + \boldsymbol{F}_{12} \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_3\dot{\boldsymbol{r}}_3) = \boldsymbol{F}_{13} + \boldsymbol{F}_{23} \tag{3}$$

式 (1)–(3) を足し合わせると，作用反作用の法則より右辺が全て消え，

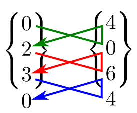
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 + m_3\dot{\boldsymbol{r}}_3) = \boldsymbol{0}$$

となる．時間積分すると，運動量が一定であることが分かる．

$$m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 + m_3\dot{\boldsymbol{r}}_3 = \text{Constant}$$

問 2. 外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を求めよ．

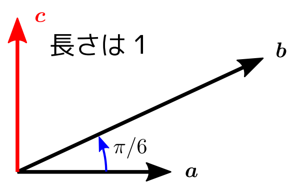
$$\boldsymbol{a} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{Bmatrix},$$



$2\times 6 - 0\times 3 = 12$
$3\times 4 - 6\times 0 = 12$
$0\times 0 - 4\times 2 = -8$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 12 \\ -8 \end{Bmatrix}$$

問 3. 下の図にベクトル $\boldsymbol{c}$ を描け．ただし，ベクトル $\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ である．また，$|\boldsymbol{a}| = 1, |\boldsymbol{b}| = 2$ であり，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ がなす角は $\pi/6$ である．



問 4. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} = 0$ を示せ．

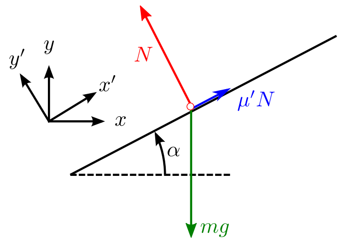
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{Bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{Bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} = (a_2b_3 - a_3b_2)\,a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\,a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,a_3 = 0$$

問 5. xy 座標系に対して，原点を中心に反時計まわりに角度 θ 回転させた座標系を $x'y'$ 座標系とする．このとき，xy 座標系で (x, y) と表される点は $x'y'$ 座標系では，どのように表されるか答えよ．((x', y') を x, y, θ で表せ)（答えだけでよい）

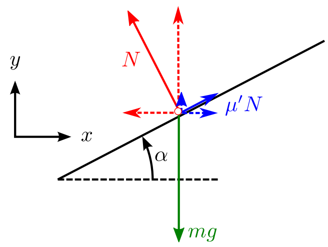
$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$$

問 6. 水平と傾き α をなす斜面に沿って質量 m の質点が運動する．斜面と質点の間には摩擦が作用しており，その動摩擦係数は μ' である．重力加速度は g とする．



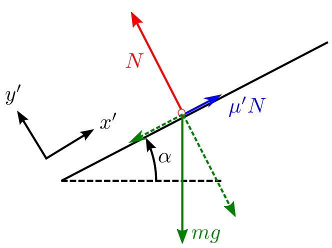
1. 質点が斜面から受ける力を N とするとき，x 方向および y 方向の運動方程式を書け．
2. 図に示すように，斜面と平行に x' 軸，斜面に直交する方向に y' 軸をとるとき，x' 方向および y' 方向の運動方程式を書け．
3. 時刻 $t = 0$ で，静止している状態（$x' = 0, \dot{x}' = 0$）から運動を始めた．このとき，時刻 $t \geq 0$ における質点の位置 x' を求めよ．

1.



$$m\ddot{x} = -N\sin\alpha + \mu' N\cos\alpha \tag{4}$$
$$m\ddot{y} = N\cos\alpha + \mu'\sin\alpha - mg \tag{5}$$

2.



$$m\ddot{x}' = -mg\sin\alpha + \mu' N \tag{6}$$
$$m\ddot{y}' = N - mg\cos\alpha = 0 \tag{7}$$

3.

式 (7) を式 (6) に代入し，2 回時間に関して積分すると，次式を得る．

$$x' = \frac{1}{2}g\left(-\sin\alpha + \mu'\cos\alpha\right)t^2 + C_1 t + C_0 \tag{8}$$

$t = 0$ において，$x' = 0, \dot{x}' = 0$ より，$C_0 = C_1 = 0$ となる．よって，

$$x' = \frac{1}{2}g\left(-\sin\alpha + \mu'\cos\alpha\right)t^2 \tag{9}$$

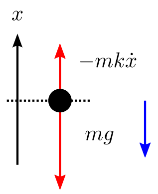
補足：

質点は斜面上のみを移動するため，力 N は**滑らかな拘束力**である．

問 7. 以下の問に答えよ.

1. 質量 m の質点が**落下**している．進行方向と反対の方向に抵抗力 $mk|\dot{x}|$ と下向きに重力 mg を受けるとき，運動方程式を書け．ただし，鉛直上向きを x 軸の正方向とし，重力加速度を g とする．
2. 質点が落下ではなく、**上昇**する場合の運動方程式を書け．
3. 時刻 $t=0$ において $v=0$ で**落下**を始めるとき，速度 v を求めよ．

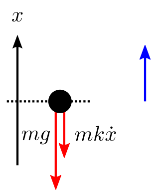
1.



落下時は上向きに抵抗力が作用する．落下しているため，$\dot{x}<0$．つまり，抵抗力は，上向きに $-mk\dot{x}$ 作用する．

$$m\ddot{x} = -mk\dot{x} - mg \tag{10}$$

2.



上昇時は下向きに抵抗力が作用する．上昇しているときは，$\dot{x}>0$．つまり，抵抗力は下向きに $mk\dot{x}$ 作用する．

$$m\ddot{x} = -mk\dot{x} - mg \tag{11}$$

式 (10) と式 (11) から分かるように落下時も上昇時も運動方程式は同じになる．

3.
$v=\dot{x}$ とおくと、式 (10) は、

$$\dot{v} = -kv - g \tag{12}$$

となる。変数分離より、

$$\frac{\mathrm{d}v}{v+\frac{g}{k}} = -k\mathrm{d}t \tag{13}$$

となる。これより、

$$\ln\left(v+\frac{g}{k}\right) = -kt + C \tag{14}$$

$$v = C'e^{-kt} - \frac{g}{k} \qquad (C' = e^C) \tag{15}$$

$t=0$ で $v=0$ より、$C'=\frac{g}{k}$ となる。よって、

$$v = \frac{g}{k}\left(-1+e^{-kt}\right) \tag{16}$$

となり，答えを得る．なお，$t\to\infty$ のとき，$v=-\frac{g}{k}$ となる．

別の解き方：
式 (12) を次のように式変形する．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v+\frac{g}{k}\right) = -k\left(v+\frac{g}{k}\right) \tag{17}$$

$y = v+\frac{g}{k}$ とおくと，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky \tag{18}$$

これより，$y=Ce^{-kt}$ が得られる．よって，

$$v+\frac{g}{k} = Ce^{-kt} \tag{19}$$

この式は，式 (15) と同じである．以下，同様に解く．