一般力学（T1T2） 2013/07/29　期末試験

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

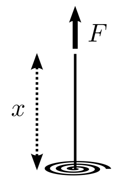
各小問の最後に書かれた括弧内の変数の <u>一部あるいはすべて</u> を用いて答えよ． 配点は小問１つにつきおよそ５点である．

極座標の運動方程式　$F_r = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right), \quad F_\theta = m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)$

回転座標系における運動方程式　$m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2 x', \qquad m\ddot{y}' = F_{y'} - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2 y'$

Lagrange の運動方程式　$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad (L = K - U)$

問 1.　線密度 λ で一様な長いひもがまとめて床の上に置かれている．このひもの一端を持ち上げる．ひもは伸びず，また絡まることなく持ち上がるものとする．



1. ひもを一定の速度 $\bar{v}$ で上昇させる運動を考える．
   (a) 右図のように時刻 t において，長さ x のひもが床から離れ持ち上げられている．このとき，このひもの運動量を求めよ．$(\lambda, x, \bar{v})$
   (b) 時刻 $t + \Delta t$ において，持ち上げられているひもの長さを表せ．$(x, \bar{v}, \Delta t)$
   (c) 時刻 $t + \Delta t$ における運動量を書け．$(\lambda, x, \bar{v}, \Delta t)$
   (d) ひもを持ち上げる力 $F(t)$ を表せ．$(\lambda, x, \bar{v})$
2. 一定の力 $\bar{F}$ でひもを上昇させる運動を考える
   (a) 時刻 t において，持ち上げられているひもの長さを x，ひもの速度を v とする．また，時刻 $t + \Delta t$ において，持ち上げられているひもの長さを $x + \Delta x$，ひもの速度を $v + \Delta v$ とする．時刻 $t + \Delta t$ における運動量を求めよ．$(\lambda, x, v, \Delta x, \Delta v)$
   (b) 力 $\bar{F}$ を x を用いて表せ．(λ, x)

解答

1.(a)

$$P(t) = \underline{\lambda x \bar{v}} \tag{1}$$

1.(b)

$$\underline{x + \bar{v}\Delta t} \tag{2}$$

1.(c)

$$P(t+\Delta t) = \underline{\lambda\left(x + \bar{v}\Delta t\right)\bar{v}} \tag{3}$$

1.(d)　$Deltat$ が微小であれば，時刻 t から $t + \Delta t$ の間に作用する力を $F(t)$ で一定とみなすことができる．すなわち，

$$P(t+\Delta t) - P(t) = \int_t^{t+\Delta t} F\mathrm{d}t \sim F(t)\Delta t \tag{4}$$

となる．これより，次式を得る．

$$F(t) = \underline{\lambda \bar{v}^2} \tag{5}$$

2.(a)

$$P(t+\Delta t) = \underline{\lambda\left(x + \Delta x\right)\left(v + \Delta v\right)} \tag{6}$$

2.(b)　$P(t) = \lambda x v$ より，

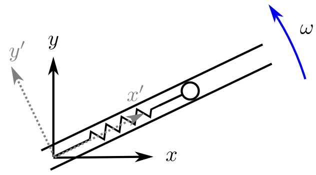
$$\lambda\left(x\Delta v + v\Delta x\right) \sim \bar{F}\Delta t \tag{7}$$

これより，

$$\bar{F} \sim \lambda\left(x\frac{\Delta v}{\Delta t} + v\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) \tag{8}$$

となる．$\Delta t \to 0$ とすると，次式を得る．

$$\bar{F} = \underline{\lambda\left(x\ddot{x} + \dot{x}^2\right)} \tag{9}$$



問 2.　筒の中にバネ定数 k のバネと質量 m の質点（小さな球）がある．バネの一端を原点に固定し，もう一方の端に質点をつける．右図のように，この筒を原点を中心に **水平面内で**（重力は考えない）一定の角速度 ω で回転させる．筒と質点には摩擦は作用しないと仮定する．また，時刻 $t=0$ のとき，筒は x 軸上にあるとする．このとき，以下の問に答えよ．

1. 原点から質点までの距離を r とおく．距離が $r=r_0$ のとき，バネは自然長となる．バネが質点を**引っ張る力** F を書け．(k, r, r_0)
2. 筒が質点に対して作用する抗力を S とおく．直交座標系 (x, y) における運動方程式を x 方向と y 方向について書け．$(m, x, y, F, S, \omega, t)$
3. 極座標における運動方程式を半径方向と周方向について書け．(m, r, F, S, ω, t)
4. 角速度 ω で回転している回転座標系 (x', y') における運動方程式を x' 方向と y' 方向について書け．ただし，時刻 $t=0$ において (x, y) 座標系と (x', y') 座標系は一致している．(m, x', F, S, ω, t)
5.「ラグランジュの運動方程式」を用いて半径方向（r 方向）の運動方程式を導出せよ．(m, r, F, S, ω, t)
6. $k > m\omega^2$ とする．時刻 $t=0$ で $r=r_0, \dot{r}=0$ のとき，時刻 t における距離 r を求めよ．(k, m, ω, r_0, t)

解答

1.

$$\underline{F = k(r - r_0)} \tag{10}$$

2.

$$\underline{m\ddot{x} = -F\cos\omega t - S\sin\omega t} \tag{11}$$
$$\underline{m\ddot{y} = -F\sin\omega t + S\cos\omega t} \tag{12}$$

3.

$$\underline{-F = m\left(\ddot{r} - r\omega^2\right)} \tag{13}$$
$$\underline{S = 2m\dot{r}\omega} \tag{14}$$

4.

$$\underline{m\ddot{x}' = -F + m\omega^2 x'} \tag{15}$$
$$\underline{0 = S - 2m\omega\dot{x}'} \tag{16}$$

を得る．

5.　ポテンシャルエネルギーは

$$U = \frac{1}{2}k\left(r - r_0\right)^2 \tag{17}$$

である．一方，運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\right) \tag{18}$$

である．

これをラグランジュの運動方程式に代入すると，

$$m\ddot{r} - m\omega^2 r + k\left(r - r_0\right) = 0 \tag{19}$$

を得る．これより，次式を得る．

$$\underline{m\ddot{r} - m\omega^2 r + F = 0} \tag{20}$$

6.　式 (19) より，

$$\ddot{r} + \frac{k - m\omega^2}{m}\left(r - \frac{kr_0}{k - m\omega^2}\right) = 0 \tag{21}$$

ここで，$q = r - \dfrac{kr_0}{k - m\omega^2}$ とおくと，式は，

$$\ddot{q} + \frac{k - m\omega^2}{m}q = 0 \tag{22}$$

となる．これより一般解として次式を得る．

$$q = A\cos\left(\sqrt{\frac{k - m\omega^2}{m}}t + \delta\right) \tag{23}$$

r と q の関係より，

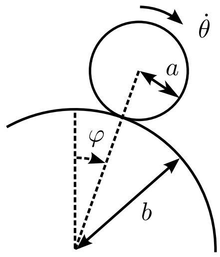
$$r = \frac{kr_0}{k - m\omega^2} + A\cos\left(\sqrt{\frac{k - m\omega^2}{m}}t + \delta\right) \tag{24}$$

となる[*1]．初期条件より，A および δ が定まる．よって，

$$r = \frac{r_0}{k - m\omega^2}\left[k - m\omega^2\left(\cos\sqrt{\frac{k - m\omega^2}{m}}\,t\right)\right] \tag{25}$$

[*1] 式 (21) を「斉次方程式の解」＋「特解」として解いてもよい．

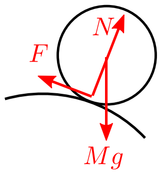
問 3. 右図のように固定された半径 b の円柱 B の上を質量 M，半径 a，密度一様な円柱 A が平面運動する．２つの円柱の中心を結ぶ直線と鉛直方向のなす角を φ，運動する円柱 A の回転角を θ とする．（時計まわりを正とする．）重力加速度 g は鉛直下向きに作用している．以下の問に答えよ．



1. 円柱 A に作用する抗力 N，摩擦力 F，重力 Mg を図示せよ．（力のベクトルを矢印で描け．ただし，大きさが正となるように矢印を描くこと．）
2. 円柱 B の（円の）中心を原点とする極座標を用いて，円柱 A の重心における運動方程式を半径方向と円周方向について書け．$(M, g, N, F, a, b, \varphi)$
3. 円柱 A の回転の方程式を書け．(M, g, N, F, a, θ)
4. 円柱 A が円柱 B 上を **滑らず転がるとき**，2 つの角速度 $\dot{\varphi}$ および $\dot{\theta}$ の関係を長さ a, b を用いて表せ．(a, b, φ, θ)
5. 運動エネルギーを書け．$(M, a, b, \varphi, \theta)$
6. 円柱 A が $\varphi = 0$ で静止した状態からゆっくりと右側に転がり始めた．円柱 A が円柱 B 上を **滑らず転がるとき**，角速度 $\dot{\varphi}$ を角度 φ を用いて表せ．(M, g, a, b, φ).

解答

1.



2.

$$-M(a+b)\dot{\varphi}^2 = N - Mg\cos\varphi \tag{26}$$
$$M(a+b)\ddot{\varphi} = -F + Mg\sin\varphi \tag{27}$$

3. 円柱の慣性モーメントは $I = \dfrac{Ma^2}{2}$ である．

$$\frac{Ma^2}{2}\ddot{\theta} = Fa \tag{28}$$

4.

$$(a+b)\dot{\varphi} = a\dot{\theta} \tag{29}$$

5.

$$K = \frac{M}{2}(a+b)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{Ma^2}{4}\dot{\theta}^2 \tag{30}$$

6. $\varphi = 0$ で位置エネルギーを 0 とおく（$U = 0$），位置エネルギーは次式で与えられる．

$$U = -Mg(a+b)(1-\cos\varphi) \tag{31}$$

重力以外の力は仕事をしないので，力学的エネルギーは保存する．すなわち，

$$\frac{M}{2}(a+b)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{Ma^2}{4}\dot{\theta}^2 - Mg(a+b)(1-\cos\varphi) = 0 \tag{32}$$

式 (29) を代入すると

$$3(a+b)\dot{\varphi}^2 = 4g(1-\cos\varphi) \tag{33}$$

これより次式を得る．

$$\dot{\varphi} = 2\sqrt{\frac{g(1-\cos\varphi)}{3(a+b)}} \tag{34}$$

問 4.　右図のように質量 M，長さ L，密度一様な棒の両端にバネ定数 k，長さの等しいバネをつけ，**滑らかで水平**な机の上に置く（重力は考慮しない）．バネの一端は机上にある壁に固定されている．棒の左端，右端の y 座標をそれぞれ y_1, y_2 とする．また**図 2** に示すように，棒の重心の y 座標を y_c，棒の回転角を θ とする．（反時計まわりを正とする）バネが伸びていない時，バネは壁面に対して平行であり，$y_1 = y_2 = 0$ とする．また，全体の運動は微小であるとし，x 方向の運動は無視できるものとする．以下の問に答えよ．

1. 重心の位置 y_c および回転角 θ を表せ．(y_1, y_2, L)
2. 静止している棒に対して，**図 1** のように棒に対して垂直方向に，重心から左に h だけ離れた位置に撃力 $\bar{F}$ を与える．撃力を与えた直後におけるの重心の y 方向速度 v_0 を求めよ．$(\bar{F}, M, L, h, k)$
3. 撃力を与えた直後の棒の角速度 ω_0 を求めよ．$(\bar{F}, M, L, h, k)$
4. 撃力が作用した後，棒はバネの復元力を受け運動する．重心における y_c 方向の運動方程式を書け．(M, k, y_c)
5. 棒の回転の方程式を書け．(M, k, θ)
6. y_c および θ は単振動する．それぞれ角振動数を書け．(M, L, k)

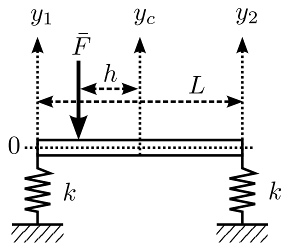


図 1：バネが自然長のとき

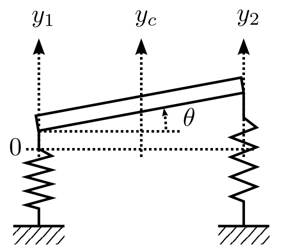


図 2：バネが伸びたとき

解答

1.

$$y_c = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{35}$$

$$\theta \sim \frac{y_2 - y_1}{L} \tag{36}$$

2.　撃力が加えられる前の運動量は 0，撃力が加えられた後の運動量は Mv_0 である．よって，

$$Mv_0 - 0 = \bar{F} \tag{37}$$

が成り立つ．これより，次式が言える．

$$v_0 = \frac{\bar{F}}{M} \tag{38}$$

3.　撃力が加えられる前の角運動量は 0，撃力が加えられた後の角運動量は $\dfrac{ML^2}{12}\omega_0$ である[*2]．

$$\frac{ML^2}{12}\omega_0 - 0 = \bar{F}h \tag{39}$$

が成立する．これより次式を得る．

$$\omega_0 = \frac{12\bar{F}h}{ML^2} \tag{40}$$

4.　棒に作用する力は $-ky_1 - ky_2 (= -2ky_c)$ である．よって次式を得る．

$$M\ddot{y}_c = -2ky_c \tag{41}$$

5.　棒に作用する力のモーメントは $ky_1L/2 - ky_2L/2 (= -kL^2\theta/2)$ である．これより，回転の方程式は

$$\frac{ML^2}{12}\ddot{\theta} = -\frac{kL^2\theta}{2} \tag{42}$$

となる．まとめると次式を得る．

$$\ddot{\theta} = -\frac{6k}{M}\theta \tag{43}$$

6.　式 (41) より，重心の y 方向の位置 y_c は角振動数 $\sqrt{2k/M}$ で単振動する．また，式 (43) より，傾き θ は角振動数 $\sqrt{6k/M}$ で単振動する．

[*2] 棒の慣性モーメントは $I = \dfrac{ML^2}{12}$ である．