

氏名

学籍番号

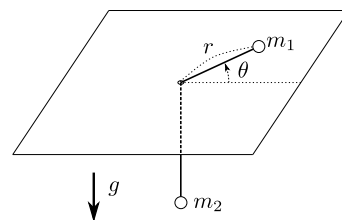
各小問の最後に書かれた括弧内の変数の一部あるいはすべてを用いて答えよ。括弧内に時間 t が含まれていない場合、時間微分を用いてはならない。

極座標の運動方程式 $F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2), \quad F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$

回転座標系における運動方程式 $m\ddot{x}' = F_{x'} + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2 x', \quad m\ddot{y}' = F_{y'} - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2 y'$

Lagrange の運動方程式 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (L = K - U)$

問 1. 右図に示すように、水平な板の穴にひもを通し、板上のひもの端点に質量 m_1 の質点 1, 板下方のひもの端点に質量 m_2 の質点 2 をつける。ひもは伸び縮みせず、また、たるまないと仮定する。板、ひも、質点の間には摩擦がなく、なめらかに運動する。穴から質点 1 までの距離を r , ひもの張力を T とおく。重力加速度は g である。以下の問に答えよ。



1. 質点 1 の運動方程式を書け (2 つ). (m_1, r, θ, T, t)
2. 質点 2 の運動方程式を書け (1 つ). (m_2, r, T, g, t)
3. 全体の運動エネルギー K を求めよ. (m_1, m_2, r, θ, t)
4. 全体のポテンシャル U を求めよ. (m_1, m_2, r, g)
5. ラグランジュの運動方程式を用いて、運動方程式を書け (2 つ). $(m_1, m_2, r, \theta, g, t)$

1. 極座標の運動方程式より、次の 2 本の式を得る。

$$-T = m_1(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (1)$$

$$0 = m_1(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \quad (2)$$

2. 質点 2 の鉛直方向の座標を y とおくと

$$m_2\ddot{y} = T - m_2g \quad (3)$$

を得る。 $\dot{y} = \dot{r}$ より、次式を得る。

$$m_2\ddot{r} = T - m_2g \quad (4)$$

3. 質点 1 の半径方向の速さは $\dot{r}$, 周方向の速さは $r\dot{\theta}$

$$K = \frac{m_1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{m_2}{2}\dot{r}^2 \quad (5)$$

4. 例えば, $r = 0$ で $U = 0$ とすると,

$$U = m_2gr \quad (6)$$

となる。

5. ラグランジュの運動方程式で一般化変位を r とおくと,

$$m_1\ddot{r} + m_2\ddot{r} - m_1r\dot{\theta}^2 + m_2g = 0 \quad (7)$$

を得る。これは式 (1) と式 (4) から, T を消去した式になっている。

ラグランジュの運動方程式で一般化変位を θ とおくと,

$$m_1 \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = 0 \quad (8)$$

を得る。時間微分をすると、次式となる。

$$m_1(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \quad (9)$$

上式は式 (2) と同じ式である。

問 2. 図-1 のように半径 a 、質量 M のリングの一点を固定する。リングの太さ、線密度は一様とする。リングはリングを含む平面内で運動する。重力加速度は g である。以下の問に答えよ。

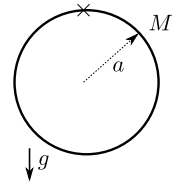


図-1

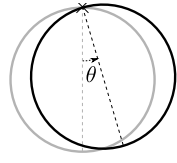


図-2

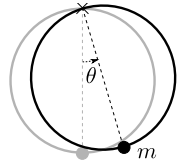


図-3

1. 固定点まわりのリングの慣性モーメント I を答えよ。 (M, a)
2. このリングを右図のように少し傾けると、このリングは単振動を始めた。図-2 に示すようにリングの傾きを θ とする。
 - a リングの角運動量 L を書け。 (I, θ, t)
 - b リングに作用するモーメント N を書け。 (M, a, g, θ)
 - c この単振動の各振動数 ω を求めよ。 $\theta \ll 1$ とする。 (M, a, g)
 - d 運動エネルギー K を求めよ。 (I, θ, t)
3. 図-3 のように、固定点の反対側に質量 m の質点を接着し、先程の問題と同様に少し傾けると、単振動した。この単振動の各振動数 ω' を求めよ。 (M, m, a, g)

1. リングの重心を中心とする慣性モーメントは Ma^2 である。平行軸の定理より、

$$I = Ma^2 + Ma^2 = \underline{2Ma^2} \quad (10)$$

を得る。

2.a

$$\underline{L = I\dot{\theta}} \quad (11)$$

2.b

$$\underline{N = -Mga \sin \theta} \quad (12)$$

2.c $\dot{L} = N$, $\theta \sim \sin \theta$ より

$$2Ma^2\ddot{\theta} = -Mga\theta \quad (13)$$

これより、

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2a}\theta = 0 \quad (14)$$

を得る。よって角振動数は、

$$\underline{\omega = \sqrt{\frac{g}{2a}}} \quad (15)$$

2.d

$$K = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 \quad (16)$$

これより、

5. 慣性モーメントは

$$I' = 2Ma^2 + m(2a)^2 \quad (17)$$

$$= 2(M + 2m)a^2 \quad (18)$$

となる。また、モーメントは

$$N' = -Mga \sin \theta - mg(2a) \sin \theta \quad (19)$$

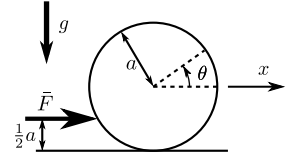
$$\sim -(M + 2m)ga\theta \quad (20)$$

$\dot{L}' = N'$ より、

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2a}\theta = 0 \quad (21)$$

を得る。よって角振動数は $\omega' = \sqrt{\frac{g}{2a}}$

問 3. 右図のように、半径 a 、質量 M の球を水平な面上に置く。球の密度は一様とする。水平面から高さ $a/2$ の位置に水平に撃力を与える。この撃力の力積は $\bar{F}$ である。動摩擦係数は μ' で与えられる。以下の問に答えよ。



1. 撃力が与えられた直後の**水平方向の速度** v_0 および球体の**角速度** ω_0 を求めよ。 ($M, a, \bar{F}$)
2. 撃力を与えられた直後から、球はすべりながら転がる運動をした。
 - a x 方向の運動方程式を書け。 (M, x, μ', g, t)
 - b 球の回転の方程式を書け。 (M, θ, a, μ', g, t)
 - c ある時刻 t_1 以降では、球は滑らず転がった。時刻 t_1 を求めよ。 ($M, a, \mu', g, \bar{F}$)

1. 運動量変化が力積に等しいので、次式が成り立つ。

$$Mv_0 = \bar{F} \quad (22)$$

よって、

$$v_0 = \frac{\bar{F}}{M} \quad (23)$$

同様に角運動量についても次式が成り立つ。

$$I\omega_0 = \frac{a}{2}\bar{F} \quad (24)$$

よって、

$$\omega_0 = \frac{a\bar{F}}{2I} = \frac{5\bar{F}}{4Ma} \quad (25)$$

2.a

$$M\ddot{x} = -F = -\mu'N = -\mu'Mg \quad (26)$$

よって、次式を得る。

$$\ddot{x} = -\mu'g \quad (27)$$

2.b

$$I\ddot{\theta} = -Fa = -\mu'Na = -\mu'Mga \quad (28)$$

よって、次式を得る。

$$\frac{2a}{5}\ddot{\theta} = -\mu'g \quad (29)$$

2.c 運動方程式を時間積分すると、

$$\dot{x} = -\mu'gt + v_0 \quad (30)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{5}{2a}\mu'gt + \omega_0 \quad (31)$$

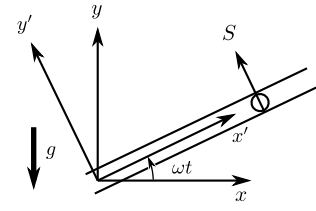
となる。滑らず転がる時間では、 $\dot{x} = -a\dot{\theta}$ を満足する。よって、

$$-\mu'gt_1 + v_0 = \frac{5}{2}\mu'gt_1 - a\omega_0 \quad (32)$$

$$\frac{9\bar{F}}{4M} = \frac{7}{2}\mu'gt_1 \quad (33)$$

$$t_1 = \frac{9\bar{F}}{14M\mu'g} \quad (34)$$

問 4. 右図に示すように、質量 m の質点を滑らかな筒に通し、この筒を角速度 ω で回転させる。時刻 $t = 0$ において、棒は x 軸上にある ($\omega t = 0$)。束縛力（拘束力）を S 、重力加速度は g とする。原点から質点までの距離を r とする。以下の問に答えよ。



1. 慣性系 (xy 座標系) に対して角速度 ω で回転している回転座標系 $x'y'$ を考える。 x' 方向の運動方程式を書け。 (r, m, ω, g, t, S)
2. y' 方向の運動方程式を書け。 (r, m, ω, g, t, S)
3. $t = 0$ において、 $r = r_0$, $\dot{r} = \frac{g}{2\omega}$ とする。 r を書け。ただし、 $0 < \omega t < \frac{\pi}{2}$ とする。 (r_0, m, ω, g, t)

1.

$$m\ddot{r} = m\omega^2 r - mg \sin \omega t \quad (35)$$

m で割ると次式を得る。

$$\ddot{r} = \omega^2 r - g \sin \omega t \quad (36)$$

2.

$$0 = S - 2m\omega\dot{r} - mg \cos \omega t \quad (37)$$

3. 式 (36) は非斉次方程式となっている。非斉次方程式の解は、斉次方程式の一般解と特解の和で与えられる。

まず、以下の斉次方程式の一般解を求める。

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0 \quad (38)$$

一般解を $e^{\lambda t}$ とおくと

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0 \quad (39)$$

となり、

$$\lambda = \pm \omega \quad (40)$$

を得る。これより、一般解は

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} \quad (41)$$

である。

続いて、式 (36) の特解を $r = C \sin \omega t$ とおく。式 (36) に代入すると、

$$-C\omega^2 = C\omega^2 - g \quad (42)$$

を得る。これより

$$C = \frac{g}{2\omega^2} \quad (43)$$

を得る。

よって、非斉次方程式の解は

$$r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t \quad (44)$$

となる。 $t = 0$ のとき $r = r_0$, $\dot{r} = 0$ となるので、

$$r_0 = A + B \quad (45)$$

$$\frac{g}{2\omega} = \omega A - \omega B + \frac{g}{2\omega} \quad (46)$$

よって、

$$A = B = \frac{r_0}{2} \quad (47)$$

$$\underline{r(t) = r_0 \cosh \omega t + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t} \quad (48)$$