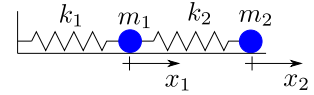


氏名

学籍番号

問 1. 右図のようなバネと質点を考える. 以下の問に答えよ.

1. 質点 1 および質点 2 の運動エネルギーの和 K を求めよ.
2. 質点 1 および質点 2 のポテンシャルエネルギーの和 U を求めよ. (どこを基準にとっても良い.)
3. ラグランジュの運動方程式を用いて, 質点 1 および質点 2 の運動方程式を導出せよ.
4. $m = m_1 = m_2$, $k_1 = 3k$, $k_2 = 2k$ のとき, 基準振動数を求めよ.
5. x_1, x_2 を時間 t の変数として書け.



解答

1. とおくと,

$$K = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 \quad (1) \quad \begin{bmatrix} 5k - m\omega^2 & -2k \\ -2k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

2. を得る. 式 (8) の行列の行列式が 0 になれば, (A, B) は非自明解を持つ. よって,

$$U = \frac{k_1}{2} x_1^2 + \frac{k_2}{2} (x_2 - x_1)^2 \quad (2) \quad (5k - m\omega^2)(2k - m\omega^2) - 4k^2 = 0 \quad (9)$$

3. $L = K - U$ とおき, より,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (3)$$

を計算する. $q = x_1$ のとき, 次式を得る.

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \quad (4)$$

$q = x_2$ のとき, 次式を得る.

$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \quad (5)$$

4. 式 (4), (5) を行列表現する.

$$m \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここで, 解を

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \cos(\omega t + \delta) \quad (7)$$

5. $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ のとき, $A_1 = 2B_1$ である. また, $\omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}}$ のとき, $A_2 = -\frac{B_2}{2}$ である. よって,

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_1/2 \end{Bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \delta\right) + \begin{Bmatrix} A_2 \\ -2A_2 \end{Bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{6k}{m}}t + \delta\right) \quad (11)$$