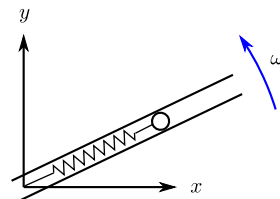


氏名

学籍番号

問 1. 左図のように筒の中に質量 m の質点がある．筒と質点が摩擦なく，質点は筒に沿ってなめらかに運動する．質点は自然長 r_0 ，バネ定数 k のバネと接続しており，図のように，筒が原点を中心に水平面内で一定の角速度 ω する．このとき，以下の問に答えよ．



1. 原点から質点までの距離を r とする．この質点の運動エネルギー K を求めよ．
2. ラグランジュの運動方程式を用いて運動方程式を導出せよ．
3. r が一定の値を取る（半径方向が釣りあっている）とき，その半径 r_1 を求めよ．
4. $|r - r_1| \ll 1$ のとき，質点は単振動した．各振動数を求めよ．

解答

質点に作用するのは筒から受ける拘束力とバネによる保存力のみであり，ラグランジュの運動方程式を用いることができる．

1. 半径方向の速さは $\dot{r}$ ，周方向の速さは $r\omega$ である．

$$K = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \omega^2) \quad (1)$$

2. バネのポテンシャル U は

$$U = \frac{k}{2} (r - r_0)^2 \quad (2)$$

である．これらを以下のラグランジュの運動方程式に代入する．

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad L = K - U \quad (3)$$

$$\ddot{r} - r\omega^2 + \frac{k}{m} (r - r_0) = 0 \quad (4)$$

3. 釣りあっているとき，加速度 $\ddot{r} = 0$ となる．よって

$$-r\omega^2 + \frac{k}{m} (r - r_0) = 0 \quad (5)$$

である．これより，

$$r_1 = \frac{\frac{k}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2} r_0 \quad (6)$$

を得る．

3. $r = r_1 + x$ とおく．式 (4) に代入すると，

$$\ddot{x} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) x = 0 \quad (7)$$

を得る．よって，

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} \quad (8)$$

となる．