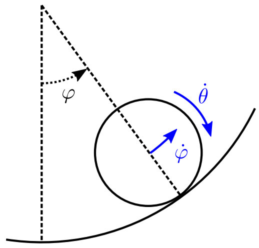
一般力学 (T1・T2) 10 回目レポート　　**（2018/ 7/ 2 10:25 a.m. 締め切り）**

氏名 ______________________　　学籍番号 ______________________

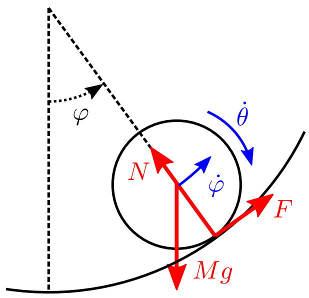
問 1. 「半径 b の完全に固定された円筒」の中に「半径 a，質量 M で密度が一様な円柱」を置く．円柱が平面運動するとき，以下の問に答えよ．



1. 円柱は右側に進んでいる．図に摩擦力 F，拘束力 N，重力 Mg を描き込め．（g は重力加速度である.）
2. 円筒の中心を原点とする極座標系を考え，運動方程式を書け．なお，円筒の中心と円柱の中心を結ぶ直線と鉛直方向のなす角を φ，円柱の角速度を $\dot{\theta}$ とする．ただし，角度 φ は<u>半時計回り</u>を正とし，角度 θ は<u>時計回り</u>を正とする．
3. 円柱の回転の方程式を書け．
4. $\dot{\varphi}$ と $\dot{\theta}$ の関係を長さ a，b を用いて表せ．
5. $\varphi \ll 1$ のとき，円柱は微小振動する．角振動数を求めよ．

解答

1.　赤い矢印が力のベクトルを表している．



2.　半径方向の座標を r とおくと，極座標系における運動方程式は以下のようになる．

$$M\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = -N + Mg\cos\varphi \qquad (1)$$
$$M\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) = F - Mg\sin\varphi \qquad (2)$$

半径方向には常に $r = b - a$ で一定であるので，

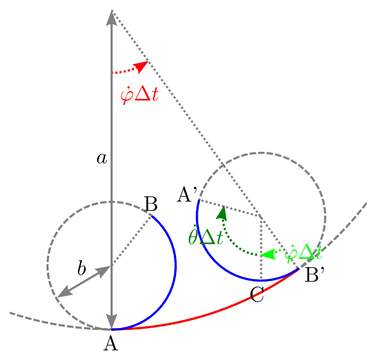
$$\underline{-M\left(b-a\right)\dot{\varphi}^2 = -N + Mg\cos\varphi} \qquad (3)$$
$$\underline{M\left(b-a\right)\ddot{\varphi} = F - Mg\sin\varphi} \qquad (4)$$

となる．

3.　円柱の回転の方程式は，以下の通りである．

$$\underline{\frac{1}{2}Ma^2\ddot{\theta} = -aF} \qquad (5)$$

4.　導出方法その１（変位の関係を用いる.）



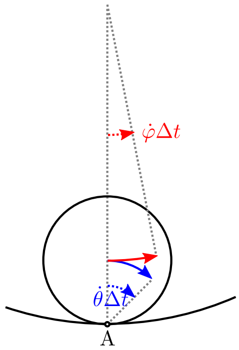
Δt の間に円柱と接する円筒の円周上の距離は $a\dot{\varphi}\Delta t$（赤線）である．一方，円柱が円筒と接する距離は $b\left(\dot{\theta} + \dot{\varphi}\right)\Delta t$（青線）である．この両者が等しいので，

$$a\dot{\varphi}\Delta t = b\left(\dot{\theta} + \dot{\varphi}\right)\Delta t \qquad (6)$$

となる．まとめると，次式を得る．

$$\underline{(b-a)\dot{\varphi} = a\dot{\theta}} \qquad (7)$$

導出方法その 2（速度の関係を用いる．）



ある瞬間だけに着目すると，円柱は接地点 A を中心に回転運動している．（円柱における接地点 A は速度 0 であり，点 A 以外の領域は速度を持って運動している．）この瞬間的に回転の中心になっている点を，「瞬時回転中心」という．点 A から円柱の重心を見ると，速度 $b\dot{\theta}$ で運動している（青の実戦の矢印）．（重心からみると点 A が速度 $b\dot{\theta}$ で運動している．）一方，円筒の中心からみるとこの円筒は速度 $(b-a)\,\dot{\varphi}$ で運動している（赤の実戦の矢印）．この 2 つの速度が等しいので，

$$\underline{(b-a)\dot{\varphi} = a\dot{\theta}} \tag{8}$$

となる．

未知数が φ, θ, F, N で 4 つ．方程式は (3)–(4) の 4 本である．抗力 N を計算する必要がなければ，φ, θ, F の 3 つの未知数に対して，3 本の方程式 (5), (4), (7) を使えば良い．

5．式 (5)，(7) より

$$F = -\frac{\frac{Ma^2}{2}}{a}\ddot{\theta} = -\frac{\frac{Ma^2}{2}}{a}\frac{b-a}{a}\ddot{\varphi} = -\frac{M}{2}(b-a)\ddot{\varphi} \tag{9}$$

を得る．式 (3) に代入すると，

$$M(b-a)\ddot{\varphi} = -\frac{M}{2}(b-a)\ddot{\varphi} - Mg\sin\varphi \tag{10}$$

を得る．まとめると，

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{3}\frac{g}{b-a}\sin\varphi = 0 \tag{11}$$

となる．$\varphi \ll 1$ のとき，$\sin\varphi \sim \varphi$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{3}\frac{g}{b-a}\varphi = 0 \tag{12}$$

となる．よって，角振動数は，

$$\underline{\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{b-a}}} \tag{13}$$

となる．

さて，式 (9) と式 (11) から，

$$F = -\frac{M}{2}(b-a)\cdot\left(-\frac{2}{3}\frac{g}{b-a}\sin\varphi\right) \tag{14}$$

$$= \frac{Mg}{3}\sin\varphi \tag{15}$$

であるので，$\varphi > 0$ のとき，$F > 0$ となる．これより小問 1 で描いたベクトル $\boldsymbol{F}$ の向きは正しいことが分かる．