一般力学 (T1・T2) 4 回目レポート **(2018/ 5/21 10:25 a.m. 締め切り)**

氏名 ______________________ 学籍番号 ______________________

問 1. 地球の質量を M, 重力定数を G, 地球の半径を R, 地球表面における重力加速度を g, 地球の自転の角速度を ω とする．地球は,「地球の中心に位置する質量 M の質点」とみなして計算してよい．以下の問に答えよ．なお，問の最後にある「　」には導出に用いるヒントが書かれている．

1. 質点が赤道上に地球の自転と同じ角速度で円運動している．この質点を静止衛星と呼ぶ．静止衛星の軌道半径 R_0 を求めよ．「極座標の運動方程式」
2. 質点が地球の半径と等しい円軌道で地球上を運動している（地球表面をすれすれで運動している）とき，その質点の速さを第一宇宙速度という（速度と言っているが，スカラーであることに注意せよ.）．第一宇宙速度 v_1 を求めよ.「極座標の運動方程式」
3. 地球上から打ち上げられた質点が，地球に帰ってこないための必要な（最小の）打ち上げ速さを第二宇宙速度という．第二宇宙速度 v_2 を求めよ.「力学的エネルギー保存の法則」

解答

1.

極座標における運動方程式より，

$$-\frac{GMm}{{R_0}^2} = -mR_0\omega^2 \qquad (1)$$

よって，

$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}} \qquad (2)$$

2.

極座標における運動方程式より，

$$-\frac{GMm}{R^2} = -mR\dot{\theta}^2 \qquad (3)$$

を得る．よって，

$$v = R\dot{\theta} = R\sqrt{\frac{GM}{R^3}} = \sqrt{\frac{GM}{R}} \qquad (4)$$

3.

遠方 $(R \to \infty)$ でのポテンシャルを $U = 0$ とする．質点の力学的エネルギーは

$$E = \frac{m}{2}v^2 - \frac{GMm}{R} \qquad (5)$$

と書ける．十分遠方 $(r \to 0)$ で質点が静止 $(v \to 0)$ するとき，力学的エネルギーは 0 になる．十分遠方 $(r \to 0)$ で運動し続ける $(v > 0)$ ためには，力学的エネルギーが $E > 0$ であればよい．よって，

$$E(r = R) = \frac{m}{2}v^2 - \frac{GMm}{R} \geq 0 \qquad (6)$$

を満足する v で最小の値をとるものが，v_2 となる．

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad (7)$$

おまけ 1

星の種類によらず，第一宇宙速度と第二宇宙速度の比は $\sqrt{2}$ である．

おまけ 2

地球表面上での重力は mg であるので，

$$\frac{GMm}{R^2} = mg \qquad (8)$$

が成り立つ．よって，

$$GM = gR^2 \qquad (9)$$

が成立する．重力定数 G, あるいは地球の質量 M が分からなくても，g と R がわかれば，静止衛生の速さや第一，第二宇宙速度の計算は可能である．($2\pi R \sim 40000$km である.）