

氏名

学籍番号

問 1. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とする .

1. ∇r を求めよ .
2. $\nabla \log r$ を求めよ .
3. $\nabla \cdot \nabla \log r$ を求めよ . ただし , $\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ である .

問 2. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする .

1. ∇r を求めよ .
2. $\nabla \frac{1}{r}$ を求めよ .
3. $\nabla \cdot \nabla \frac{1}{r}$ を求めよ . ただし , $\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ である .

解答

 y 方向も同様にして , 次式を得る .

(以下では空白を減らすため , 行列の転置でベクトルを表している .)

$$\nabla \cdot \nabla \log r = 0 \quad (10)$$

1. 定義より ,

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (1)$$

1. 問 1.1 と同様にして , 次式を得る .

両辺 , x で偏微分すると

$$2r \frac{\partial r}{\partial x} = 2x \quad (2)$$

$$\nabla r = \begin{bmatrix} x & y & z \\ r & r & r \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

2.

を得る . これより ,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} \quad (12)$$

よって , y 方向も同様にして次式を得る .

$$\nabla r = \begin{bmatrix} x & y \\ r & r \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

 y, z 方向も同様にして , 次式を得る .

2.

$$\frac{\partial \log r}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r^2} \quad (5)$$

3.

 y 方向も同様にして , 次式を得る .

$$\nabla r = \begin{bmatrix} x & y \\ r^2 & r^2 \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} \quad (14)$$

$$= -\frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (15)$$

$$= -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} \quad (16)$$

3.

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \log r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^2} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{r^2} - \frac{2x}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (8)$$

$$= \frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} \quad (9)$$

 y, z 方向も同様にして , 次式を得る .

$$\nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} = 0 \quad (17)$$